Exercices supplémentaires : ln

Partie A : Propriétés algébriques

Exercice 1

Exprimer en fonction de $\ln(2)$:

$$\ln\left(\frac{1}{2}\right)\ ;\ln(8)\ \ ;\ \ln(64)\ ;\ \ln(2e^2)\ \ ;\ \ln(64e)\ ;\ \ln(\sqrt{32})\ \ ;\ \ln\left(\frac{2}{e}\right)\ \ ;\ \ln\left(\frac{32}{e}\right)$$

Exercice 2

Simplifier les expressions suivantes

$$A=\ln(\sqrt{5}+2)+\ln(\sqrt{5}-2)\quad ;\quad B=\ln(\sqrt{5}+2)-\ln(\sqrt{5}-2)\quad ;\quad C=\ln\left(\sqrt{\sqrt{5}+2}\right)+\ln\left(\sqrt{\sqrt{5}-2}\right)$$

Partie B : Equations, inéquations

Exercice 1

Résoudre les équations suivantes

$$\ln(2x+5)=0$$
$$\ln(2x-5)=1$$
$$\ln(2x-5)=2$$
$$\ln(x-2)+\ln(x-32)=6\ln(2)$$
$$\ln(x-2)(x-32)=6\ln(2)$$
$$\ln(-2x+7)-\ln(4x-9)=-\ln(3)$$
$$\ln(x^2-1)=\ln(4x-1)-2\ln(2)$$
$$(\ln x)^2-\ln(x)-6=0$$
$$e^{2x}+2e^x-1=0$$
$$e^{1+\ln(x)}=\ln(2)$$

Exercice 2

Résoudre les inéquations suivantes

$$\ln(4x-8)>0$$
$$\ln(4x-8)\leq\ln(3)$$
$$\ln(4x-8)>1$$
$$\ln(x+2)\leq\ln(x^2)$$
$$\ln(x-2)\geq\ln(2x-1)$$
$$\ln(x^2-1)\leq\ln(4x-1)-2\ln(2)$$
$$\ln(x^2-x-2)<2\ln(3-x)$$
$$(\ln x)^2-\ln(x)-6<0$$
$$e^x+e^{-x}-6>0$$
$$\frac{1+\ln(x)}{2-\ln(x)}>0$$

Partie C : Etude de fonctions

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\ln(x)}$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 2

Partie A

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$.

1) Etudier les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2) Etudier les variations de f.
3) Montrer que $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est positif et en déduire le signe de f.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x + \frac{\ln(x)}{x}$

1) Déterminer les limites de g en 0 et en $+\infty$.
2) Démontrer que $g'(x) = \frac{f(x)}{x^2}$ et en déduire les variations de g sur $]0;+\infty[$.
3) Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.
4) Etudier la position relative de $\mathcal{C}_g$ et D.

Exercice 3

On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln\big((x-1)(3-x)\big)$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

Exercice 4

1) On considère la fonction $u: x \mapsto \ln(x) - x$ définie sur $]0;+\infty[$. Etudier les variations de u. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de u sur $]0;+\infty[$.
2) En utilisant la question précédente, étudier les variations de la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = (\ln x)^2 - 2x$.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = 2\ln(x) - (\ln x)^2$

1) Etudier les limites de f en $+\infty$ et en 0. Déterminer les asymptotes éventuelles de $\mathcal{C}_f$.
2) Calculer f' et dresser le tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$.
3) Préciser les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.
4) Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e^2.
5) On note D_k la droite d'équation $y = k$ avec $k < 1$. Montrer que pour tout réel $k < 1$, la droite D_k coupe $\mathcal{C}_f$ en deux points d'abscisses respectives m et m'.
6) Montrer que $mm' = e^2$ pour tout réel $k < 1$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2 + 3x - x\ln(x)$.

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Etudier les variations de f.

Exercice 7

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln(x)$.

1) Etudier les variations de g. Préciser $g(1)$.
2) En déduire le signe de g sur $]0;+\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-(\ln x)^2$.

1) Montrer que pour tout réel $x>0$, $f(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.
2) Déterminer la limite de f en $+\infty$ (on pourra mettre x^2 en facteur dans l'expression de $f(x)$).

En déduire la limite de f en 0.

3) En utilisant la partie A, étudier le sens de variations de f sur $]0;+\infty[$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $]3;+\infty[$ par $f(x)=(x+1)\ln(x-3)$.

1) Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition. Préciser les asymptotes éventuelles.
2) Vérifier que pour $x>3$, $f'(x)=\frac{x+1}{x-3}+\ln(x-3)$
3) Calculer f'' et en déduire les variations de f'.
4) Etudier le signe de f' sur $]3;+\infty[$.
5) Déterminer le tableau de variations de f.
6) Calculer les coordonnées des points d'intersections de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses.

Correction exercices supplémentaires : ln

Partie A : Propriétés algébriques

Exercice 1

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\ln(2)}$

$\ln(8) = \ln(2^3) = \boxed{3\ln(2)}$

$\ln(64) = \ln(2^6) = \boxed{6\ln(2)}$

$\ln(2e^2) = \ln(2) + \ln(e^2) = \boxed{2 + \ln(2)}$

$\ln(64e) = \ln(64) + \ln(e) = \boxed{6\ln(2) + 1}$

$\ln(\sqrt{32}) = \frac{1}{2}\ln(32) = \frac{1}{2}\ln(2^5) = \boxed{\frac{5}{2}\ln(2)}$

$\ln\left(\frac{2}{e}\right) = \ln(2) - \ln(e) = \boxed{\ln(2) - 1}$

$\ln\left(\frac{32}{e}\right) = \ln(32) - \ln(e) = \boxed{5\ln(2) - 1}$

Exercice 2

$A = \ln(\sqrt{5} + 2) + \ln(\sqrt{5} - 2) = \ln\left((\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)\right) = \ln(5 - 2^2) = \ln(1) = \boxed{0}$

$B = \ln(\sqrt{5} + 2) - \ln(\sqrt{5} - 2) = \ln\left(\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2}\right) = \ln\left(\frac{(\sqrt{5} + 2)^2}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)}\right) = \ln\left(\frac{5 + 4\sqrt{5} + 4}{5 - 4}\right) = \boxed{\ln(9 + 4\sqrt{5})}$

$C = \ln\left(\sqrt{\sqrt{5} + 2}\right) + \ln\left(\sqrt{\sqrt{5} - 2}\right) = \ln\left(\sqrt{(\sqrt{5} + 2)(\sqrt{5} - 2)}\right) = \ln(\sqrt{5 - 4}) = \ln(1) = \boxed{0}$

Partie B : Equations, inéquations

Exercice 1

$\ln(2x + 5) = 0$: Ensemble de résolution : $2x + 5 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{2}$ donc on résout dans $\left]-\frac{5}{2}; +\infty\right[$

$\ln(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow \ln(2x + 5) = \ln(1) \Leftrightarrow 2x + 5 = 1 \Leftrightarrow x = -2$ donc $\boxed{S = \{-2\}}$

Remarque : on pouvait aussi composer avec l'exponentielle : $\ln(2x + 5) = 0 \Leftrightarrow e^{\ln(2x+5)} = e^0 \Leftrightarrow 2x + 5 = 1 \ldots$

$\ln(2x - 5) = 1$: Ensemble de résolution : $2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}$ donc on résout dans $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$

$\ln(2x - 5) = 1 \Leftrightarrow e^{\ln(2x-5)} = e^1 \Leftrightarrow 2x - 5 = e \Leftrightarrow x = \frac{5+e}{2}$ donc $\boxed{S = \left\{\frac{5+e}{2}\right\}}$

$\ln(2x - 5) = 2$: Ensemble de résolution : $2x - 5 > 0$ donc on résout dans $\left]\frac{5}{2}; +\infty\right[$

$\ln(2x - 5) = 2 \Leftrightarrow e^{\ln(2x-5)} = e^2 \Leftrightarrow 2x - 5 = e^2 \Leftrightarrow x = \frac{e^2+5}{2}$ donc $\boxed{S = \left\{\frac{e^2+5}{2}\right\}}$

$\ln(x - 2) + \ln(x - 32) = 6\ln(2)$: ensemble de résolution : $\begin{cases} x - 2 > 0 \\ x - 32 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > 32 \end{cases}$ donc on résout dans $]32; +\infty[$.

$\ln(x - 2) + \ln(x - 32) = 6\ln(2) \Leftrightarrow \ln\left((x - 2)(x - 32)\right) = \ln(2^6) \Leftrightarrow (x - 2)(x - 32) = 64$

$\Leftrightarrow x^2 - 34x = 0 \Leftrightarrow x(x - 34) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 34$ donc $\boxed{S = \{34\}}$ car 0 n'appartient pas à l'ensemble de résolution.

$\ln(x - 2)(x - 32) = 6\ln(2)$: ensemble de résolution : $(x - 2)(x - 32) > 0$ donc on résout dans $]-\infty; 2[\cup]32; +\infty[$

$\ln\,((x - 2)(x - 32) = 6\ln(2) \Leftrightarrow \ln\left((x - 2)(x - 32)\right) = \ln(2^6) \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 34$ (résolution précédente)

Donc $\boxed{S = \{0;34\}}$

$\ln(-2x+7) - \ln(4x-9) = -\ln(3)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} -2x+7 > 0 \\ 4x-9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{7}{2} \\ x > \frac{9}{4} \end{cases}$ donc on résout dans $\left]\frac{9}{4};\frac{7}{2}\right[$

$\ln(-2x+7) - \ln(4x-9) = -\ln(3) \Leftrightarrow \ln(-2x+7) + \ln(3) = \ln(4x-9) \Leftrightarrow \ln\big(3(-2x+7)\big) = \ln(4x-9)$
$\Leftrightarrow -6x + 24 = 4x - 9 \Leftrightarrow x = 1{,}5$ donc $\boxed{S = \emptyset}$

$\ln(x^2-1) = \ln(4x-1) - 2\ln(2)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} x^2-1 > 0 \\ 4x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\\ x > \frac{1}{4} \end{cases}$

Donc on résout dans $]1;+\infty[$
$\ln(x^2-1) = \ln(4x-1) - 2\ln(2) \Leftrightarrow \ln(x^2-1) + \ln(4) = \ln(4x-1) \Leftrightarrow \ln\big(4(x^2-1)\big) = \ln(4x-1)$
$\Leftrightarrow 4x^2 - 4 = 4x - 1 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0$: $\Delta = 64$ donc $x_1 = \frac{4+8}{8} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{4-8}{8} = -\frac{1}{2}$

Finalement $\boxed{S = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$

$(\ln x)^2 - \ln(x) - 6 = 0$: Ensemble de résolution : $]0;+\infty[$
On pose $X = \ln(x)$ et on résout $X^2 - X - 6 = 0$: $\Delta = 25$ d'où $X_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{1-5}{2} = -2$.
On a donc $\ln(x) = 3$ ou $\ln(x) = -2$ et donc $x = e^3$ ou $= e^{-2}$. Finalement $\boxed{S = \{e^3; e^{-2}\}}$

$e^{2x} + 2e^x - 1 = 0$: Ensemble de résolution $\mathbb{R}$
On pose $X = e^x$ et on résout $X^2 + 2X - 1 = 0$: $\Delta = 8$ d'où $X_1 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1 + \sqrt{2}$ et $X_2 = -1 - \sqrt{2}$.
On a donc $e^x = -1 + \sqrt{2}$ ou $e^x = -1 - \sqrt{2}$ ce qui est impossible (e^x est toujours positif…) d'où $x = \ln\big(-1 + \sqrt{2}\big)$ et donc $\boxed{S = \{\ln(-1 + \sqrt{2})\}}$

$e^{1+\ln(x)} = \ln(2)$: ensemble de résolution $]0;+\infty[$
$e^{1+\ln(x)} = \ln(2) \Leftrightarrow e \times e^{\ln(x)} = \ln(2) \Leftrightarrow ex = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{e}$ donc $\boxed{S = \left\{\frac{\ln(2)}{e}\right\}}$

Exercice 2

$\ln(4x-8) > 0$: Ensemble de résolution : $4x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ donc on résout dans $]2;+\infty[$.
$\ln(4x-8) > 0 \Leftrightarrow \ln(4x-8) > \ln(1) \Leftrightarrow 4x - 8 > 1 \Leftrightarrow 4x > 9 \Leftrightarrow x > \frac{9}{4}$ donc $\boxed{S = \left]\frac{9}{4};+\infty\right[}$

$\ln(4x-8) \leq \ln(3)$: Ensemble de résolution : $4x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ donc on résout dans $]2;+\infty[$
$\ln(4x-8) \leq \ln(3) \Leftrightarrow 4x - 8 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq \frac{11}{4}$ donc $\boxed{S = \left]2;\frac{11}{4}\right]}$

$\ln(4x-8) > 1$: Ensemble de résolution : $4x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2$ donc on résout dans $]2;+\infty[$
$\ln(4x-8) > 1 \Leftrightarrow \ln(4x-8) > \ln(e) \Leftrightarrow 4x - 8 > e \Leftrightarrow x > \frac{e+8}{4}$ donc $\boxed{S = \left]\frac{e+8}{4};+\infty\right[}$

$\ln(x+2) \leq \ln(x^2)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} x+2 > 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 0 \end{cases}$ donc on résout dans $]-2;0[\cup]0;+\infty[$
$\ln(x+2) \leq \ln(x^2) \Leftrightarrow x + 2 \leq x^2 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 \leq 0$: $\Delta = 9$ donc $-x^2 + x + 2$ est du signe de $a = -1$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{-1+3}{-2} = -1$ et $x_2 = \frac{-1-3}{-2} = 2$. On trouve donc que x doit être inférieur à -1 ou supérieur à 2.
A l'aide de l'ensemble de résolution, on obtient : $\boxed{S =]-2;-1] \cup [2;+\infty[}$

$\ln(x-2) \geq \ln(2x-1)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} x-2 > 0 \\ 2x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases}$ donc on résout dans $]2;+\infty[$
$\ln(x-2) \geq \ln(2x-1) \Leftrightarrow x - 2 \geq 2x - 1 \Leftrightarrow -x \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 1$ donc $\boxed{S = \emptyset}$

$\ln(x^2-1) \leq \ln(4x-1) - 2\ln(2)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} x^2-1 > 0 \\ 4x-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x+1) > 0 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} x < -1 \text{ ou } x > 1 \\ x > \frac{1}{4} \end{cases}$ donc on résout dans $]1;+\infty[$

$\ln(x^2-1) \leq \ln(4x-1) - 2\ln(2) \Leftrightarrow \ln(x^2-1) \leq \ln(4x-1) - \ln(2^2) \Leftrightarrow \ln(x^2-1) \leq \ln\left(\frac{4x-1}{4}\right)$

$\Leftrightarrow x^2 - 1 \leq x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 - x - \frac{3}{4} \leq 0$: $\Delta = 4$ donc $x^2 - x - \frac{3}{4}$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines $x_1 = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$ et $x_2 = \frac{1-2}{2} = -\frac{1}{2}$. L'expression est donc négative sur $\left[-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ et donc $\boxed{S = \left]1; \frac{3}{2}\right]}$

$\ln(x^2 - x - 2) < 2\ln(3-x)$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} x^2 - x - 2 > 0 \\ 3 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \text{ ou } x > 2 \\ x < 3 \end{cases}$ (on résout la première inéquation avec le calcul de $\Delta = 9$…) Finalement, on résout dans $]-\infty; -1[\cup]2; 3[$.

$\ln(x^2 - x - 2) < 2\ln(3-x) \Leftrightarrow \ln(x^2 - x - 2) < \ln((3-x)^2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 < (3-x)^2$

$\Leftrightarrow x^2 - x - 2 < 9 - 6x + x^2 \Leftrightarrow 5x < 11 \Leftrightarrow x < \frac{11}{5}$ donc $\boxed{S =]-\infty; -1[\cup \left]2; \frac{11}{5}\right[}$

$(\ln x)^2 - \ln(x) - 6 < 0$: Ensemble de résolution : $x > 0$ donc on résout dans $]0; +\infty[$.

On pose $X = \ln(x)$ et on résout $X^2 - X - 6 < 0$: $\Delta = 25$ donc $X^2 - X - 6$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines $X_1 = \frac{1+5}{2} = 3$ et $X_2 = \frac{1-5}{2} = -2$ donc $X \in]-2; 3[$. Pour revenir à x, on a donc $-2 < \ln(x) < 3$ et en composant avec exponentielle qui est strictement croissante, $e^{-2} < x < e^3$ donc $\boxed{S =]e^{-2}; e^3[}$

$e^x + e^{-x} - 6 > 0$: on résout dans $\mathbb{R}$ et on pose $X = e^x$

$e^x + e^{-x} - 6 > 0 \Leftrightarrow X + \frac{1}{X} - 6 > 0 \Leftrightarrow X^2 + 1 - 6X > 0$ en multipliant par X strictement positif

$\Delta = 32$ donc $X^2 - 6X + 1$ est du signe de $a = 1$ sauf entre les racines $X_1 = \frac{6+4\sqrt{2}}{2} = 3 + 2\sqrt{2}$ et $X_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

On doit donc avoir $X < 3 - 2\sqrt{2}$ ou $X > 3 + 2\sqrt{2}$. Pour en revenir à x :

$\ln(x) < 3 - 2\sqrt{2}$ ou $\ln(x) > 3 + 2\sqrt{2}$ donc $x < e^{3-2\sqrt{2}}$ ou $x > e^{3+2\sqrt{2}}$

Finalement, $\boxed{S = \left]-\infty; e^{3-2\sqrt{2}}\right[\cup \left]e^{3+2\sqrt{2}}; +\infty\right[}$

$\frac{1+\ln(x)}{2-\ln(x)} > 0$: Ensemble de résolution : $\begin{cases} x > 0 \\ 2 - \ln(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq e^2 \end{cases}$ donc on résout dans $]0; e^2[\cup]e^2; +\infty[$. On va ensuite construire un tableau de signe :

$1 + \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$ et $2 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 2 \Leftrightarrow x < e^2$

x	0		e^{-1}		e^2		$+\infty$
Signe de $1+\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2-\ln(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $\frac{1+\ln(x)}{2-\ln(x)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

Finalement $\boxed{S =]e^{-1}; e^2[}$

Partie C : Etude de fonctions

Exercice 1

1) Ensemble de définition : $\begin{cases} x > 0 \\ \ln(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$ donc $\boxed{D_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[}$

2) En 0 :

$\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$ et par quotient, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0}$

En 1 :

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \ln(x) = 0^-$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty}$ et de la même manière, $\boxed{\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty}$

En $+\infty$:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc par quotient $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$

3) f est de la forme $\frac{1}{v}$ avec $v(x) = \ln(x)$ dérivable et non nul sur l'ensemble de définition donc f est dérivable sur son ensemble de définition et $f'(x) = -\frac{v'(x)}{v(x)^2} = -\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = -\frac{1}{x(\ln x)^2}$

Sur l'ensemble de définition, x est positif et $(\ln x)^2$ est bien sûr positif également donc f' est négatif et la fonction f est décroissante sur chaque intervalle où elle est définie.

x	0		1		$+\infty$
f	0	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	0

Exercice 2

Partie A

1) En 0

$\lim\limits_{x\to 0} x^2+1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc par soustraction $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty}$

En $+\infty$, on met x^2 en facteur : $f(x) = x^2\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$

$\lim\limits_{x\to +\infty} 1 = 1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0$ donc par opérations $\lim\limits_{x\to +\infty} 1+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{\ln(x)}{x^2}$ mais aussi $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ donc par multiplication $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty}$

2) f est de la forme $u-v$ avec $u(x) = x^2+1$ dérivable sur $]0;+\infty[$ et $v(x) = \ln(x)$ dérivable sur $]0;+\infty[$ donc f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = 2x-\frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$.

Le dénominateur est clairement positif donc f' est du signe de $2x^2-1$ dont les racines sont $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{2}+1-\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2}+\ln\left(\sqrt{2}\right)$ et comme $\sqrt{2}>1$, on peut dire que $\ln\left(\sqrt{2}\right)$ est positif et par somme $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est positif. Comme il s'agit du minimum de f, on a donc que f est positif sur $]0;+\infty[$

Partie B

1) En 0

$\lim\limits_{x\to 0} x = 0^+$; $\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$ donc par quotient $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$ et par addition $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty}$

En $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ donc par addition $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = +\infty}$

2) g est de la forme $u+\frac{v}{w}$ avec $u(x) = x$ dérivable sur $]0;+\infty[$, $v(x) = \ln(x)$ dérivable sur $]0;+\infty[$ et $w(x) = x$ dérivable sur $]0;+\infty[$ et non nul donc g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et

$$g'(x) = u'(x)+\frac{v'(x)w(x)-v(x)w'(x)}{w(x)^2} = 1+\frac{\frac{1}{x}\times x-\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$$

Le dénominateur est clairement positif et f est positif d'après la partie A donc $g'(x)$ est positif et g est croissante sur $]0;+\infty[$.

3) En $+\infty$: $g(x)-x = \frac{\ln(x)}{x}$ et d'après les détails des limites précédentes, ce rapport à pour limite 0 en $+\infty$ donc D est bien une asymptote oblique à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

4) Pour étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_g$ et D, on étudie le signe de $g(x) - x$ donc de $\frac{\ln(x)}{x}$. Or le dénominateur est clairement positif sur $]0; +\infty[$ donc c'est du signe de $\ln(x)$ qui est négatif sur $]0; 1]$ et positif sur $[1; +\infty[$. Donc $\mathcal{C}_g$ est en dessous de D sur $]0; 1]$ et au dessus de D sur $[1; +\infty[$.

Exercice 3

1) Ensemble de définition : $(x-1)(3-x) > 0$ et grâce à un tableau de signe, on trouve $\boxed{D_f =]1; 3[}$

2)

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)(3-x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ donc par composition $\boxed{\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -\infty}$

$\lim\limits_{x\to 3}(x-1)(3-x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ donc par composition $\boxed{\lim\limits_{x\to 3} f(x) = -\infty}$

3) f est de la forme $\ln(u)$ avec $u(x) = (x-1)(3-x) = -x^2 + 4x - 3$ dérivable et strictement positif sur $]1; 3[$ donc f est dérivable sur D_f et $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{-2x+4}{-x^2+4x-3}$

Le dénominateur est positif sur D_f (c'est comme cela qu'est défini D_f) donc $f'(x)$ est du signe de $-2x + 4$.

x	1		2		3
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 4

1) u est définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ et $u'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$.

Le dénominateur est clairement positif donc $u'(x)$ est du signe de $1 - x$:

x	0		1		$+\infty$
Signe de $u'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de u		$\nearrow$	-1	$\searrow$	

Le maximum de u est égal à -1 donc u est négatif sur $]0; +\infty[$.

2) f est de la forme $v^2 - 2x$ avec $v(x) = \ln(x)$ dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = 2v'(x)v(x) - 2 = \frac{2\ln(x)}{x} - 2 = \frac{2\ln(x) - 2x}{x} = \frac{2(\ln(x) - x)}{x} = \frac{2u(x)}{x}$$

Le dénominateur est clairement positif et u est négatif d'après la question précédente donc $f'(x)$ est négatif et donc la fonction f est décroissante sur $]0; +\infty[$.

Exercice 5

1) Pour la limite en $+\infty$, on factorise par $\ln(x)$: $f(x) = \ln(x)\,(2 - \ln(x))$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} 2 - \ln(x) = -\infty$ et par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = -\infty}$

Pour la limite en 0 :

$\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0}(\ln x)^2 = +\infty$ et par soustraction, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$

Cette dernière limite indique que la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe de f.

2) f est de la forme $2u - u^2$ avec $u(x) = \ln(x)$ dérivable sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = 2u'(x) - 2u'(x)u(x) = \frac{2}{x} - \frac{2\ln(x)}{x} = \frac{2(1 - \ln(x))}{x}$$

Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln(x)$.

$1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$

$f(e) = 2\ln(e) - (\ln e)^2 = 2 \times 1 - 1^2 = 1$

x	0		e		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

3) Intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses : on résout $f(x) = 0$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln(x) - (\ln x)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln(x)\,(2 - \ln(x)) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou } 2 - \ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = 0 \text{ ou} \ln(x) = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = e^2$

$\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des abscisses en deux points d'abscisse 1 et e^2.

4) Une équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse e^2 est $y = f'(e^2)(x - e^2) + f(e^2)$

Or $f'(e^2) = \frac{2(1-\ln(e^2))}{e^2} = \frac{2(1-2)}{e^2} = -\frac{2}{e^2}$ et $f(e^2) = 0$ d'où $\boxed{y = -\frac{2}{e^2}x + 2}$

5) Intersection de D_k et $\mathcal{C}_f$ avec $k < 1$: on doit résoudre $f(x) = k$. Or d'après le tableau de variations de f, sur $]0; e^2[$, f est continue, strictement croissante et k est bien compris entre la limite de f en 0 et $f(1)$ donc d'après le théorème de la bijection, il existe une solution à l'équation $f(x) = k$ dans $]0; e^2[$. Un même raisonnement dans $]e^2; +\infty[$, on a une seconde solution à l'équation $f(x) = k$.

6) On note m la solution de $f(x) = k$ qui appartient à $]0; e^2[$ et m' celle de $]e^2; +\infty[$. On a donc

$f(m) = k = f(m')$ or

$f(m) = f(m') \Leftrightarrow 2\ln \mathrm{m} - (\ln m)^2 = 2\ln m' - (\ln m')^2 \Leftrightarrow 2(\ln m - \ln m') - [(\ln m)^2 - (\ln m')^2] = 0$

$\Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{m}{m'}\right) - (\ln m - \ln m')(\ln m + \ln m') = 0 \Leftrightarrow 2\ln\left(\frac{m}{m'}\right) - \ln\left(\frac{m}{m'}\right)\ln(mm') = 0$

$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{m}{m'}\right)[2 - \ln(mm')] = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{m}{m'}\right) = 0 \text{ ou } 2 - \ln(mm') = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{m'} = 1 \text{ ou} \ln(mm') = 2$

$\Leftrightarrow m = m' \text{ ou } mm' = e^2$

La première proposition est impossible au vue des intervalles auxquels appartiennent m et m' donc $\boxed{mm' = e^2}$

Exercice 6

1) En 0 :

$\lim\limits_{x\to 0} x^2 + 3x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$ donc par soustraction $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0}$

En $+\infty$, on factorise par x^2 : $f(x) = x^2\left(1 + \frac{3}{x} - \frac{\ln(x)}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x} = 1$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \frac{3}{x} - \frac{\ln(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

2) f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$f'(x) = 2x + 3 - \left(1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}\right) = 2x + 3 - \ln(x) - 1 = 2x + 2 - \ln(x)$

Le signe de f' n'étant pas évident à étudier, on calcule f'' : $f''(x) = 2 - \frac{1}{x} = \frac{2x-1}{x}$

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'		$\searrow$	$3 + \ln(2)$	$\nearrow$	
Signe de $f'(x)$		$+$		$+$	
Variations de f	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 7

Partie A

1) g est de la forme $u - \frac{1}{u} + v$ avec $u(x) = x^2$ dérivable et non nul sur $]0; +\infty[$ et $v(x) = -4\ln(x)$ dérivable sur $]0; +\infty[$ donc g est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$g'(x) = u'(x) + \frac{u'(x)}{u(x)^2} + v'(x) = 2x + \frac{2x}{x^4} - \frac{4}{x} = 2x + \frac{2}{x^3} - \frac{4}{x} = \frac{2x^4 + 2 - 4x^2}{x^3} = \frac{2(x^4 - 2x^2 + 1)}{x^3}$$

$= \frac{2(x^2-1)^2}{x^3}$ Le dénominateur et le numérateur sont clairement positifs donc $g'(x)$ est positif et g est croissante.

$g(1) = 1 - 1 - 4 \times 0 = 0$

On en déduit que g est négative sur $]0; 1[$ et positive sur $]1; +\infty[$.

Partie B

1) Pour $x > 0$:

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{1}{4\left(\frac{1}{x}\right)^2} - \left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2 = \frac{1}{4x^2} + \frac{x^2}{4} - (-\ln(x))^2 = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4x^2} - (\ln x)^2 = f(x)$$

2) Pour $x > 0$

$$f(x) = x^2\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2\right)$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4x^4} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = 0$ et par addition

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{4} + \frac{1}{4x^4} - \left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = \frac{1}{4}$ mais aussi $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ donc par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

En 0, on pose $X = \frac{1}{x}$: $f(x) = f\left(\frac{1}{X}\right) = f(X)$

$\lim\limits_{x\to0} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} f(X) = +\infty$ donc par composition $\boxed{\lim\limits_{x\to0} f(x) = +\infty}$

3) f est de la forme $u + \frac{1}{v} - w^2$ avec u, v et w dérivables sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{8x}{(4x^2)^2} - \frac{2\ln(x)}{x} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2x^3} - \frac{2\ln(x)}{x} = \frac{1}{2x}\left(x^2 - \frac{1}{x^2} - 4\ln x\right) = \frac{g(x)}{2x}$$

Le dénominateur est clairement positif donc $f'(x)$ est du signe de g

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Exercice 8

1) En 3

$\lim\limits_{x\to3} x + 1 = 4$; $\lim\limits_{x\to3} x - 3 = 0$ donc $\lim\limits_{x\to3} \ln(x-3) = -\infty$ et par produit $\boxed{\lim\limits_{x\to3} f(x) = -\infty}$

En $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 3 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x-3) = +\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

La limite en 3 indique que la droite d'équation $x = 3$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2) f est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x + 1$ dérivable sur $]3; +\infty[$ et $v(x) = \ln(x-3)$ de la forme $\ln(w)$ avec $w(x) = x - 3$ dérivable et strictement positif sur $]3; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]3; +\infty[$ et

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = \ln(x-3) + (x+1) \times \frac{1}{x-3} = \ln(x-3) + \frac{x+1}{x-3}$$

3) $f''(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{(x-3)-(x+1)}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} - \frac{4}{(x-3)^2} = \frac{x-3-4}{(x-3)^2} = \frac{x-7}{(x-3)^2}$

x	3		7		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'		$\searrow$	$\ln(4)+2$	$\nearrow$	
Signe de $f'(x)$		$+$		$+$	
Variations de f	$-\infty$		$\nearrow$		$+\infty$

6) Intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses : on résout $f(x) = 0$:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)\ln(x-3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \text{ou } \ln(x-3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x - 3 = 1$

$\Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 4$ La première possibilité n'appartient pas à l'ensemble de définition de f donc le seul point d'intersection de $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses a pour coordonnées $(4; 0)$.