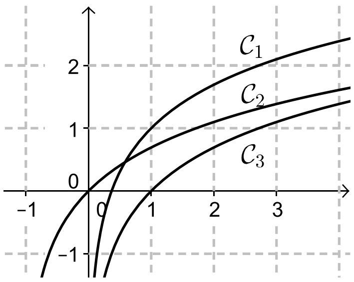
Fonction logarithme népérien – Exercices

Calculs avec ln

1 On a représenté ci-contre les fonctions f_1, f_2, f_3 définies par
- $f_1(x) = \ln x$;
- $f_2(x) = \ln(x+1)$;
- $f_3(x) = \ln(x) + 1$.

Associer chaque fonction à sa courbe.



2 Simplifier les nombres suivants.

a. $\ln e$ **b.** $e^{\ln 5}$ **c.** $\ln 1$

d. $e^{\ln 2}$ **e.** $\ln\sqrt{e}$ **f.** $\ln\left(\frac{(e^3)^2}{e^5}\right)$

3 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$.

a. $\ln 8$ **b.** $\ln 32e$ **c.** $\ln\sqrt{32}$

d. $\ln\frac{1}{2}$ **e.** $\ln\frac{e}{4}$ **f.** $\ln 64e^3$

4 Exprimer les nombres suivants en fonction de $\ln 2$ et $\ln 5$.

a. $\ln 20$ **b.** $\ln 100$ **c.** $\ln 80e$

d. $\ln\sqrt{10}$ **e.** $\ln\frac{5}{4}$ **f.** $\ln\frac{5}{4e}$

5 Écrire avec un seul ln les nombres suivants.

a. $\ln 50 - \ln 2$ **b.** $3\ln 2 - \ln 8 + \ln 4$

c. $\ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{4}{5}$ **d.** $\ln\frac{e^2}{9} + \ln 27$

6 Vrai ou faux ? Justifier.

a. Pour tout réel x strictement positif
$$\ln x^3 - \ln x^2 = \ln x^{25} - \ln x^{24}.$$
b. Pour tout réel x strictement positif
$$(\ln x)^2 + \ln(x^3) > 0.$$
c. $\ln 2 + \ln 2^2 + \ln 2^3 + \ln 2^4 = 10\ln 2$.

7 Simplifier pour $x \in]0;+\infty[$ les expressions suivantes.

a. $\ln(5x) + \ln\frac{x}{5}$ **b.** $\ln x^2 - \ln x$

Équations et inéquations

8 Résoudre les équations suivantes.

a. $\ln x = 3$ **b.** $1 - 2e^x = 0$

c. $2 - 3e^x = 11$ **d.** $(x+2)\ln x = 0$

9 Résoudre les équations suivantes.

a. $\ln(2x+4) = \ln 2$ **b.** $\ln(x+1) = \ln(2x+3)$

c. $\ln x(\ln x - 1) = 0$ **d.** $5\ln x - x\ln x = 0$

10 Déterminer le signe des fonctions suivantes.

a. $f_1(x) = -3\ln x$ **b.** $f_2(x) = (x+1)\ln x$

c. $f_3(x) = \frac{\ln x}{x}$ **d.** $f_4(x) = (x-1)\ln x$

11 Résoudre les inéquations suivantes.

a. $\ln x < 2$ **b.** $e^x < 8$

c. $3\ln x + 2 > -1$ **d.** $2e^x - 5 > e^x + 1$

Fonction ln

12 Vrai ou faux ? Justifier.

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$. Si $f'(x) = \frac{1}{x}$, alors $f(x) = \ln x$.

13 Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction ln.

1. Déterminer une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
2. Déterminer les coordonnées du point où T recoupe l'axe des ordonnées.
3. Montrer que la tangente T' à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

14 Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée et en déduire les variations.

a. $f(x) = 3 - \ln x$ **b.** $g(x) = x^2 + \ln x$

15 Vrai ou faux ? Justifier.

On note $\mathcal{C}$ la courbe de la fonction $f : x \mapsto \ln x$ définie sur $]0;+\infty[$. Soit T et T' les tangentes aux points d'abscisse 3 et 5.

a. $\mathcal{C}$ est au-dessus de T.

b. $\mathcal{C}$ est au-dessous de T'.

c. La fonction f' est croissante sur $]0;+\infty[$.

d. Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) \geq 0$.

e. $f'(3) > f'(5)$.

16 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse e.
2. À l'aide de la concavité de f, en déduire le signe de l'expression $\ln x - \frac{x}{e}$ sur $]0;+\infty[$.

Études de fonctions

17 Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x) = e^x - 3x.$$
1. Calculer $f'(x)$.
2. Résoudre $f'(x) > 0$.
3. Dresser alors le tableau de variation de f.

18 Soit f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x - \ln x$.

1. Calculer $f'(x)$.
2. Étudier le signe de $f'(x)$ et construire alors le tableau de variation de f.
3. Montrer que f est convexe.

19 On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x) = -(\ln x)^2 + 4\ln x - 3.$$
1. En utilisant l'impression d'écran du logiciel de calcul formel ci-dessous, répondre aux questions suivantes.

deriver(-(ln(x))^2+4*ln(x)-3) $-\frac{2}{x} * \ln(x) + \frac{4}{x}$
resoudre((4-2*ln(x))/x>0,x) [((x>0) et (x<exp(2))]

   a. Que vaut $f'(x)$?

   b. Résoudre $f'(x) > 0$.

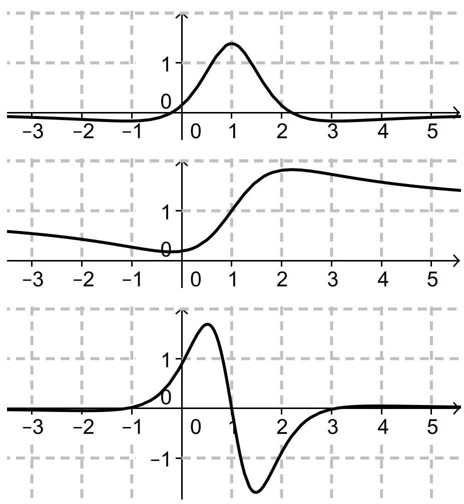
2. En déduire les variations de f.
3. Une entreprise constate que la vente de sa production dégage un bénéfice moyen par objet en milliers d'euros égal à $f(x)$, où x désigne le nombre d'objets fabriqués.

Indiquer pour quelle quantité d'objets fabriqués l'entreprise fait un bénéfice maximal.

20 Soit la fonction f définie par $f(x) = e^x - x^2$.
1. Conjecturer les variations de f.
2. **a.** Étudier le signe de $f''(x)$.
   b. En déduire les variations de f' puis le signe de f'.
   c. Démontrer alors la conjecture sur les variations de f.
3. Démontrer que la courbe de f admet un point d'inflexion et préciser ses coordonnées.

21 Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.
On note C_f la courbe de f et Γ celle de ln.
1. **a.** Tracer C_f et Γ sur la calculatrice. Quelle conjecture peut-on faire sur leur position relative ?
   b. Calculer $f(x) - \ln x$ et étudier le signe sur $]0;+\infty[$.
   c. Démontrer la conjecture.
2. Prouver que $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$ et déterminer les variations de f.
3. Montrer que C_f et Γ ont la même tangente au point d'abscisse 1.
4. Reprendre les questions précédentes avec la fonction $f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$ où n est un entier supérieur ou égal à 0. On montrera que $f_n'(x) = \frac{1-n\ln x}{x^{n+1}}$.

22 On a représenté ci-dessous les courbes représentatives d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ ainsi que des dérivées f' et f''. Associer à chaque fonction sa courbe et justifier.



Courbe 1

Courbe 2

Courbe 3

23 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = x^3\left(\ln x - \frac{5}{6}\right).$$
1. Tracer la courbe de f sur la calculatrice et émettre une conjecture sur les variations de f ainsi que sa convexité.
2. Utiliser l'impression d'écran du logiciel de calcul formel ci-dessous pour démontrer ou préciser les conjectures.

factoriser(deriver(x^3(ln(x)-5/6))) $\frac{3x^2(2\ln x - 1)}{2}$
deriver(3x^2(2*ln(x)-1)/2) $6x\ln x$

3. Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'inflexion.

24 *(Bac 2013, Antilles-Guyane).* Une entreprise fabrique des pièces métalliques pour la construction automobile. On modélise le bénéfice journalier par la fonction B définie sur $[0;10]$ par $B(x) = x + 4e^{-x} - 5$ où x représente le nombre de pièces produites et vendues, exprimé en centaines, et $B(x)$ représente le bénéfice en milliers d'euros.
1. **a.** Déterminer $B'(x)$.
   b. Démontrer que $B'(x)$ s'annule uniquement pour $x = \ln(4)$.
   c. Calculer les valeurs exactes de $B(0)$, $B(10)$ et $B(\ln(4))$.
   d. Dresser et compléter le tableau de variation de la fonction B sur $[0;10]$.
2. **a.** Justifier que l'équation $B(x) = 0$ possède une unique solution α sur $[\ln(4);10]$.
   b. Donner une valeur approchée à 10^{-2} de α.
3. À partir de combien d'unités produites et vendues l'entreprise sera-t-elle bénéficiaire ?

25 Une entreprise lance un nouvel accessoire de mode dont elle a le monopole. Pour x milliers d'accessoires fabriqués, avec $1 \leq x \leq 10$, elle estime que le coût de production, en milliers d'euros, est donné par
$$C(x) = 5\ln x + 12.$$
La demande est liée au prix p de vente selon la relation $x = 11 - p$ où p est le prix d'un millier d'accessoires exprimé en milliers d'euros.
1. **a.** Montrer que l'expression $R(x)$ du chiffre d'affaires pour la vente de x milliers d'accessoires est
   $$R(x) = 11x - x^2.$$
   b. Étudier pour $x \in [1;10]$ les variations de la fonction R et dresser son tableau de variations.
   c. Sur la calculatrice tracer les courbes représentatives de C et R et en déduire entre quelles productions cette fabrication d'accessoires est rentable.
2. Soit $B(x)$ le bénéfice total réalisé pour la production de x milliers d'accessoires.
   a. Montrer que pour tout $x \in [1;10]$,
   $$B(x) = -x^2 + 11x - 12 - 5\ln x.$$
   b. Calculer $B'(x)$, étudier les variations de B et dresser son tableau de variation sur $[1;10]$.
   c. Montrer que l'équation $B(x) = 0$ admet deux solutions.
   Donner une valeur approchée, à 10^{-2} près, de chacune de ces solutions. Préciser ainsi le résultat de la question **1.c.**
   d. Préciser pour quelle quantité le bénéfice est maximal. Quel est le montant de ce bénéfice ?

Équations avec des puissances

26 Résoudre les équations suivantes puis donner une valeur approchée à 10^{-3}.

a. $x^6 = 1{,}23$ **b.** $x^9 = 0{,}6$ **c.** $(5-x)^4 = 3$

27 Déterminer le plus petit entier n tel que :

a. $0{,}9^n < 10^{-4}$ **b.** $1{,}3^n \geq 10^3$ **c.** $\left(\frac{3}{4}\right)^n < 10^{-5}$

28 Une balle est lâchée de 100 mètres de haut et rebondit aux 4/5ème de sa hauteur à chaque rebond. Au bout de combien de rebonds les rebonds de la balle sont inférieurs à 1 cm ?

29 En programmant un algorithme puis en résolvant une inéquation, déterminer le plus petit entier n tel que
$$1+2+2^2+\cdots+2^n \geq 10^6.$$

30 Un banquier désire calculer le nombre n d'années nécessaire à un placement à un intérêt composés au taux de t % afin qu'il soit doublé.

1. **a.** Vérifier que cela revient à résoudre l'inéquation
$$\left(1+\frac{t}{100}\right)^n \geq 2.$$
   b. Démontrer que n vérifie $n \geq \frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{t}{100}\right)}$.
   c. Compléter le tableau suivant.

Taux t	2 %	2,5 %	3 %	4 %	6 %
Nombre d'années					
$\frac{72}{t}$					

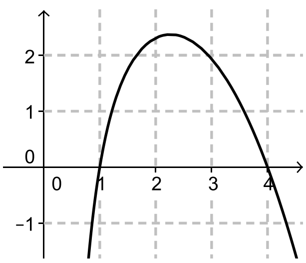
   d. Émettre une conjecture : « un capital placé à intérêts composés au taux de t % nécessite approximativement . . années pour doubler ».
2. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction ln au point d'abscisse 1.
3. En déduire que $\ln x \approx x-1$ pour $x \approx 1$.
4. Expliquer alors l'approximation faite à la question **1.d.**

31 *(Bac 2014, métropole).* On comptait 700 élèves dans un lycée lors de la rentrée de 2012.
À la fin de chaque année scolaire, après le départ des nouveaux bacheliers et des élèves quittant l'établissement, le lycée conserve 70 % de son effectif pour l'année suivante.
Il reçoit 240 nouveaux élèves à chaque rentrée.

1. Calculer le nombre d'élèves dans le lycée aux rentrées 2013 et 2014.
2. On définit la suite (a_n) par $a_0=700$ et, pour tout entier naturel n, $a_{n+1}=0{,}7a_n+240$.
   Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n=a_n-800$.
   a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison 0,7. Préciser son premier terme.
   b. Exprimer u_n en fonction de n.
   c. En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
3. On choisit de modéliser le nombre d'élèves du lycée par les termes de la suite (a_n).
   Il faudra agrandir le lycée dès que l'effectif sera supérieur ou égal à 780 élèves.
   a. Montrer que résoudre l'inéquation
$$800-100\times 0{,}7^n \geq 780$$
   revient à résoudre l'inéquation $0{,}7^n \leq 0{,}2$.
   b. En quelle année faudra-t-il agrandir le lycée ?

Études de fonctions avec fonctions auxiliaires

32 **(Rappel)**
Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$.
On a représenté ci-contre la courbe de f'.
Déterminer les variations de la fonction f.



33 Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par
$$f(x)=\frac{x-1}{x}\ln x.$$

1. **a.** Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x-1+\ln x$.
   b. Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g.
2. **a.** Montrer que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.
   b. Déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

34 Soit φ la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par
$$\varphi(x)=1+x^2-2x^2\ln x.$$

1. **a.** Étudier les variations de φ sur $]0;+\infty[$.
   b. Calculer $\varphi(e)$.
   c. Démontrer que l'équation $\varphi(x)=0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;e]$.
   Donner un encadrement à 10^{-2} de α.
   d. En déduire le signe de $\varphi(x)=0$ sur $]0;+\infty[$.
2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{\ln x}{1+x^2}$.
   a. Montrer que $f'(x)=\frac{\varphi(x)}{x(1+x^2)^2}$.
   b. À l'aide la question **1.** en déduire les variations de f.
   c. En utilisant l'égalité $\varphi(\alpha)=0$, montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha^2}$.

35 *(Bac 2012, Polynésie)* Une entreprise fabrique un produit chimique. Elle peut produire x mètres cube chaque jour ; on suppose que x appartient à l'intervalle $[1;6]$. Le coût total de production C_T, exprimé en milliers d'euros, est fonction de la quantité produite x. Pour $x \in [1;6]$, on a
$$C_T(x)=\frac{x^2}{2}+4\ln x+5{,}6.$$

1. Vérifier que la fonction C_T est strictement croissante sur l'intervalle $[1;6]$.
2. On note $C_M(x)$ le coût moyen de production en milliers d'euros du mètre cube pour une production journalière de x mètres cube, avec $x \in [1;6]$.
   On rappelle que $C_M(x)=\frac{C_T(x)}{x}$.
   a. Écrire l'expression de $C_M(x)$ en fonction de x.
   b. On admet que la fonction C_M est dérivable sur l'intervalle $[1;6]$. Calculer $C_M'(x)$ et vérifier que $C_M'(x)=\frac{x^2-3{,}2-8\ln x}{2x^2}$ pour tout $x \in [1;6]$.
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;6]$ par $f(x)=x^2-3{,}2-8\ln x$.
   a. On admet que f est dérivable sur $[1;6]$. Étudier les variations de f sur $[1;6]$.
   b. Démontrer que l'équation $f(x)=0$ possède une solution unique α dans $[2;6]$; déterminer une valeur approchée par excès à 10^{-1} près de α.
   c. En déduire le signe de $f(x)$ sur $[1;6]$ (on ne demande pas de justification).
4. On prendra pour α la valeur approchée trouvée à la question **3.b.**
   a. En utilisant les résultats de la question **3.**, étudier le sens de variation de la fonction C_M sur $[1;6]$. Construire son tableau de variation (les valeurs dans le tableau seront arrondies au dixième).
   b. Quel est le coût moyen minimal de production du mètre cube de produit ?
5. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Comment faut-il choisir le prix de vente du mètre cube de produit pour que l'entreprise puisse faire des bénéfices quelle que soit la production choisie dans l'intervalle donné ?