02 : Limites

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \left(5x^2+3x-\dfrac{19}{x}\right)$ **2.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x+2x-3\right)$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x-x^2+1\right)$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x^2-x+1}{3x^2-1}$ **5.** $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(e^x+x\right)\left(\dfrac{1}{x}-5\right)$ **6.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x-1}{e^x+2}$

Exercice 2

On donne le tableau de variation d'une fonction *f*.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$	3 ↘	0 ↘	$-\infty$

Soit g définie sur $\left]-\infty;-1\right[\cup \left]-1;+\infty\right[$ par $g(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

1. Quelles sont les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$?

En déduire les limites de *g* en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. a. Déterminer le signe de $f(x)$ selon les valeurs de *x*.

b. En déduire les limites de *g* en 1 à gauche et à droite.

Exercice 3

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{e^{2x}-2}{e^x+1}$.

1. Calculer la limite de la fonction *f* en $-\infty$.

2. a. Vérifier que pour tout réel *x*, $f(x)=\dfrac{e^x-2e^{-x}}{1+e^{-x}}$.

b. Calculer la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

Exercice 4

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

1. Déterminer la limite de *f* en $-\infty$.

2. a. Montrer que pour tout réel *x*, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$

b. En déduire la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

Exercice 5

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\cos x-x$.

1. Montrer que pour tout réel *x*, $-2-x\leq f(x)\leq 2-x$.

2. Calculer les limites de *f* en $-\infty$ et en $+\infty$.

3. a. Montrer que pour tout réel *x* strictement négatif, on a $\dfrac{2}{x}-1\leq\dfrac{f(x)}{x}\leq-\dfrac{2}{x}-1$.

b. En déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Exercice 6

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x^2}$ et *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x}$.

Partie A

1. Justifier chaque donnée du tableau de variation de la fonction *f* ci-dessous.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2. On veut montrer que pour tout réel *x*, $e^{x^2}\geq x^2+1$.

Soit *h* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=e^{x^2}-x^2-1$.

a. Démontrer que pour tout réel *x*, $h'(x)=2x\left(e^{x^2}-1\right)$.

b. Étudier le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c. Vérifier que $h(0)=0$, puis conclure quant à la question posée.

Partie B

1. Calculer les limites de g en 0 à gauche et à droite.

2. Utiliser le résultat démontré dans la partie A pour calculer la limite de g en $+\infty$.

3. a. Montrer que pour tout réel $x<0$, $g(x)\leq x+\dfrac{1}{x}$.

b. En déduire la limite de g en $-\infty$.

4. a. Montrer que pour tout réel x non nul, $g'(x)$ a le même signe que $2x^2-1$.

b. Dresser le tableau de variation de g.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2e^x+1}{e^x-1}$ et C_f sa courbe représentative.

1. Calculer la limite de f en 0.

2. a. Montrer que pour tout réel x de $]0;+\infty[$, $f(x)=\dfrac{2+e^{-x}}{1-e^{-x}}$.

b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

3. Justifier que la courbe C_f admet deux asymptotes. En donner une équation.

4. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0;+\infty[$.

b. En déduire le sens de variation de f.

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\frac{1}{2}x^4+x^3-6x^2+7x$.

1. Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calcule $f'(x)$, puis $f''(x)$ pour tout réel x.

3. Justifie chaque donnée du tableau de variation de la fonction f ci-dessous.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{2}$	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	0	27	0	$+\infty$

4. a. Déterminer le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.