03 : Dérivation et convexité

Exercice 1

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{2x^2-1}{3x^2+1}}$ **2.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{-x}+1}{2e^{-x}+5}$ **3.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \cos\left(\dfrac{\pi x-1}{2x+1}\right)$

Exercice 2

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x)=\sqrt{x^2+2}$ **2.** $g(x)=(3x+1)^3$ **3.** $h(x)=\dfrac{1}{\left(x^4+3\right)^2}$

Exercice 3

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3+xe^{1-x}$ On note C_f la courbe représentative de la fonction *f*.

1. Calculer la limite de *f* en $-\infty$.

2. a. Montrer que pour tout réel *x*, $f(x)=3+\dfrac{xe}{e^x}$.

b. Calculer la limite de *f* en $+\infty$. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?

3. a. Montrer que pour tout réel *x*, $f'(x)=(1-x)e^{1-x}$.

b. Dresser le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{x^2+2x+3}{x^2+2}$ et C_f sa courbe représentative.

1. a. Justifier que la courbe C_f admet une asymptote *d* parallèle à l'axe des abscisses.

b. Avec la calculatrice, représenter C_f et *d*. Conjecturer la position de C_f par rapport à *d*.

c. Démontrer cette conjecture.

2. a. Calculer $f'(x)$ pour tout réel *x*.

b. Dresser le tableau de variation de *f* sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soit *f* la fonction définie sur $\left[0;5\right]$ par $f\left(x\right)=0{,}125x^3-0{,}75x^2+4$.

1. a. Déterminer $f'\left(x\right)$.

b. Montrer que cette courbe C_f admet en deux points une tangente horizontale.

2. Déterminer le signe de $f'\left(x\right)$ puis en déduire les variations de *f* sur $\left[0;5\right]$.

3. a. Montrer que C_f admet un point d'inflexion *I* dont on précisera ses coordonnées.

b. Déterminer une équation de la tangente *T* en ce point *I*.

c. Que peut-on dire de la position relative de *T* et de C_f ?

Exercice 6

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=x^6+3x^2+6$.

1. Montrer que *f* est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation de la tangente *T* à C_f en son point d'abscisse 1.

3. En déduire que pour tout réel *x* : $x^6+3x^2+6\geq 12x-2$.

Exercice 7

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\left(x\right)=e^{-x}+3x^4$.

1. Montrer que *g* est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Déterminer une équation de la tangente en 0 à la courbe de *g*.

3. Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=e^{-x}+3x^4+x-1$.
Montrer la courbe de *f* est toujours située au-dessus de l'axe des abscisses.

Exercice 8

On modélise le nombre de malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie, en fonction du nombre t, de jours écoulés depuis l'apparition d'une maladie.
Cette modélisation est donnée par la fonction f définie sur $[0;60]$ par $f(t)=t^2e^{-0,1t}$.

1. Calculer $f'(t)$ pour tout réel t de l'intervalle $[0;60]$.

2. a. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0;60]$.

b. Déterminer les variations de la fonction f sur $[0;60]$.

c. Déterminer, au bout de combien de jours, le nombre de malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.

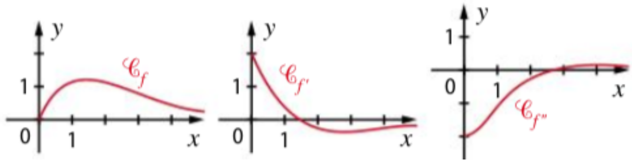
3. Démontrer que pour tout réel t de $[0;60]$, $f''(t)=(0,01t^2-0,4t+2)e^{-0,1t}$.

4. a. Étudier sur $[0;60]$, la convexité de la fonction f.

b. Justifier que sur l'intervalle $[0;15]$, la courbe représentative C_f de la fonction f admet un unique point d'inflexion.
Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice, de l'abscisse de ce point d'inflexion.

Exercice 9

Soit la courbe C_f ci-dessous, d'une fonction *f* définie, deux fois dérivable sur l'intervalle $\left[0;5\right]$, ainsi que les courbes $C_{f'}$ et $C_{f''}$ de f' et de f''.



Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.
1. Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction *f* semble convexe.

2. Pourquoi peut-on conjecturer que la courbe C_f admet un point d'inflexion *I* ?
Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de *I*.

Partie B

La fonction *f* représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $\left[0;5\right]$ par $f\left(x\right)=\left(x^2+2x\right)e^{-x}$.
1. Calculer $f'\left(x\right)$ pour tout réel *x* de $\left[0;5\right]$.

2. a. Montrer que pour tout réel $x\in\left[0;5\right]$: $f''\left(x\right)=\left(x^2-2x-2\right)e^{-x}$.

b. Déterminer sur quel intervalle de $x\in\left[0;5\right]$, *f* est concave.

3. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de C_f sur $\left[0;5\right]$.