04 : Continuité

Exercice 1

Soit *f* la fonction définie sur $\left[-2;+\infty\right[$ par $f\left(x\right)=x^3-6x+1$.

1. Justifier que l'équation $f\left(x\right)=0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $\left[-2;2\right]$.

2. a. Montrer que *f* est strictement croissante sur $\left[2;+\infty\right[$.

b. Montrer que l'équation $f\left(x\right)=0$ a une unique solution dans l'intervalle $\left[2;+\infty\right[$.

c. Donner un encadrement de la solution à 10^{-2} près.

Exercice 2

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f\left(x\right)=4x^5+2x-2$.

1. Montrer que *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $f\left(x\right)=8$ possède une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

3. Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

Exercice 3

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\left(x\right)=x^3+x-1$.

1. Étudier les variations de *g* sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que l'équation $g\left(x\right)=0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

3. Donner un encadrement de α à 0,01 près.

4. En justifiant, donner le signe de $g\left(x\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit *g* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g\left(x\right)=2x^3-3x^2-1$.

1. Étudier les variations de *g*.

2. Montrer que l'équation $g\left(x\right)=0$ admet sur $\mathbb{R}$, une unique solution α. Donner un encadrement de α à 0,1 prés.

3. Déterminer le signe de $g\left(x\right)=0$ sur $\mathbb{R}$.

4. Soit *f* la fonction définie sur $]-1;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1-x}{x^3+1}$.

a. Calculer $f'(x)$ puis exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

b. Déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de *f* sur $]-1;+\infty[$.

Exercice 5

On injecte à un patient un médicament puis on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.
On admet que la concentration est modélisée par la fonction *f* définie sur $[0;15]$ par $f(x)=(x+2)e^{-0,5x}$, où *x* représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction *f*.
Calculer $f'(x)$ et en déduire le tableau de variation de la fonction *f* sur $[0;15]$.

2. Justifier que l'équation $f(x)=0,1$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[0;15]$.

3. Déterminer un encadrement de α d'amplitude un dixième.

4. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre.
Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?

Exercice 6

On modélise le nombre de malades (en milliers) dans un pays lors d'une épidémie, en fonction du nombre *t*, de jours écoulés depuis l'apparition d'une maladie.
Cette modélisation est donnée par la fonction *f* définie sur $[0;60]$ par $f(t)=t^2e^{-0,1t}$.

1. Calculer $f'(t)$ pour tout réel *t* de l'intervalle $[0;60]$.

2. a. Déterminer le signe de $f'(t)$ sur $[0;60]$.

b. Déterminer les variations de la fonction *f* sur $[0;60]$.

c. Déterminer, au bout de combien de jours, le nombre de malades est maximal puis préciser le nombre approximatif de malades ce jour-là.

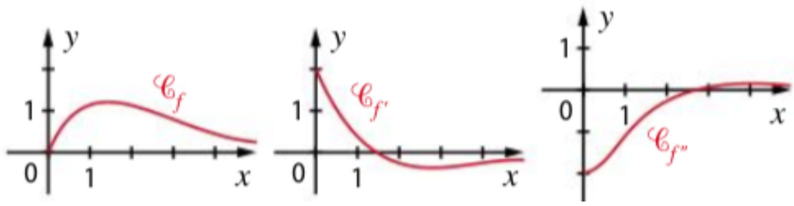
3. Démontrer que pour tout réel *t* de $[0;60]$, $f''(t)=(0,01t^2-0,4t+2)e^{-0,1t}$.

4. a. Étudier sur $[0;60]$, la convexité de la fonction *f*.

b. Justifier que sur l'intervalle $[0;15]$, la courbe représentative C_f de la fonction *f* admet un unique point d'inflexion.
Donner une interprétation dans le contexte de l'exercice, de l'abscisse de ce point d'inflexion.

Exercice 7

Soit la courbe C_f ci-dessous, d'une fonction *f* définie, deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;5]$, ainsi que les courbes $C_{f'}$ et $C_{f''}$ de f' et de f''.



Partie A

Dans cette partie les réponses seront obtenues à l'aide de lectures graphiques.

1. Donner un intervalle défini par deux entiers sur lequel la fonction *f* semble convexe.

2. Pourquoi peut-on conjecturer que la courbe C_f admet un point d'inflexion *I* ?
Donner un encadrement par deux entiers consécutifs de l'abscisse de *I*.

Partie B

La fonction *f* représentée ci-dessus est définie sur l'intervalle $[0;5]$ Par $f(x) = (x^2 + 2x)e^{-x}$.
1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel *x* de $[0;5]$.

2. a. Montrer que pour tout réel $x \in [0;5]$: $f''(x) = (x^2 - 2x - 2)e^{-x}$.

b. Déterminer sur quel intervalle de $[0;5]$, *f* est concave.

3. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion de C_f sur $[0;5]$.

Exercice 8

On se propose d'étudier l'évolution d'une population de coccinelles à l'aide d'un modèle utilisant la fonction f définie sur $\left[0;1\right]$, par $f\left(x\right)=kx\left(1-x\right)$, k étant un paramètre réel qui dépend de l'environnement.
Dans le modèle choisi, on admet que le nombre des coccinelles reste inférieur à un million.
L'effectif des coccinelles, exprimé en millions, est approché pour l'année n par un nombre réel u_n avec u_n, compris entre 0 et 1.
Par exemple, si pour l'année zéro il y a 300 000 coccinelles, on prendra $u_0=0,3$.
On admet que l'évolution d'une année sur l'autre obéit à la relation $u_{n+1}=f\left(u_n\right)$, f étant la fonction définie ci-dessus.
Le but de l'exercice est d'étudier le comportement de la suite $\left(u_n\right)$ pour différentes valeurs de la population initiale u_0 et du paramètre k.

1. On suppose $u_0=0,4$ et $k=1$.

a. Étudier les variations de f sur $\left[0;1\right]$.

b. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0\leq u_n\leq 0,5$ puis étudier le sens de variation de la suite $\left(u_n\right)$.

c. La suite $\left(u_n\right)$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ? Justifier la réponse.

d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?

2. On suppose maintenant $u_0=0,3$ et $k=1,8$.

a. Étudier les variations de la fonction f sur $\left[0;1\right]$ et montrer que $f\left(0,5\right)$ appartient à $\left[0;0,5\right]$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $0\leq u_n\leq 0,5$ et établir que, pour tout entier naturel n : $u_{n+1}\geq u_n$.

c. La suite $\left(u_n\right)$ est-elle convergente ? Si oui, quelle est sa limite ?

d. Que peut-on dire de l'évolution à long terme de la population de coccinelles avec ces hypothèses ?