07 : Primitives et équations différentielles

Exercice 1

Prouver dans les cas suivants que la fonction F est une primitive de la fonction f sur un intervalle I proposé.

1. $f(x)=\dfrac{2(x^4-2)}{x^3}$ et $F(x)=x^2+\dfrac{2}{x^2}$ sur $I=]0;+\infty[$

2. $f(x)=\dfrac{1}{e^x-1}$ et $F(x)=\ln(1-e^x)-x$ sur $I=]0;+\infty[$

3. $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ et $F(x)=\ln(\ln x)$ sur $I=]1;+\infty[$

Exercice 2

Dans chacun des cas, déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I.

1. $f(x)=x^4-x^3+3x^2-5x+4$, $I=\mathbb{R}$

2. $f(x)=(x+5)^2$, $I=\mathbb{R}$

3. $f(x)=1-\dfrac{1}{x^2}$, $I=]0;+\infty[$

4. $f(x)=x(3-x^2)^4$, $I=\mathbb{R}$

5. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $I=]0;+\infty[$

6. $f(x)=\dfrac{3}{x-5}$, $I=]5;+\infty[$

7. $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x}$, $I=]-1;0[$

8. $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$, $I=\mathbb{R}$

9. $f(x)=\dfrac{3}{(x+2)^4}$, $I=]-2;+\infty[$

10. $f(x)=(x+1)e^{x^2+2x}$, $I=\mathbb{R}$

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'=5y$

2. $y'+3y=0$

3. $y'=2y+1$

4. $2y'-4y=3$

5. $4y'+6y-1=0$

6. $2y'=3y-4$

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes avec la condition initiale proposée :

1. $y' = -3y$ avec $f(-5) = 1$

2. $3y' - 6y = 0$ avec $f(1) = 3$

3. $y' = 2y + 1$ avec $f(0) = -1$

4. $2y' + 3y + 5 = 0$ avec $f(0) = 2$

Exercice 5

Soit l'équation différentielle $(E): y' + 2y = e^{3x}$.

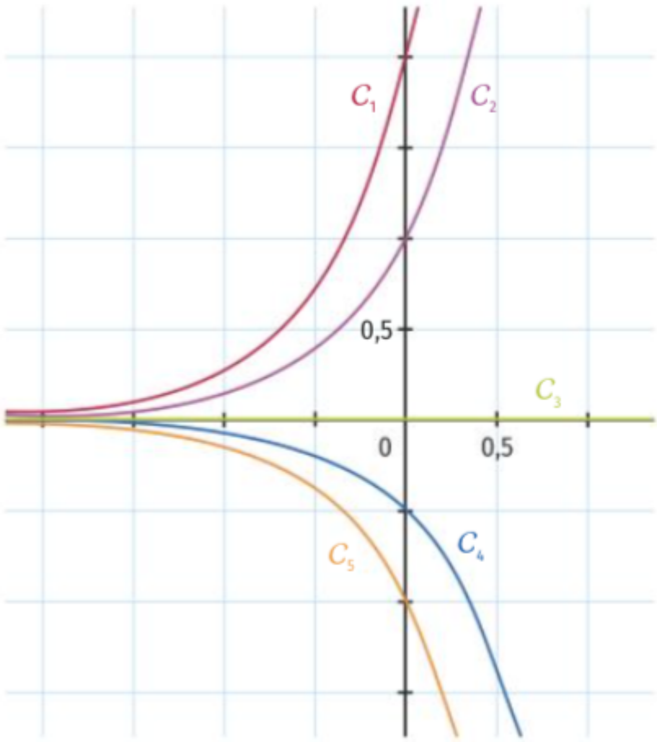
1. Déterminer le réel a tel que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ae^{3x}$ soit une solution particulière de (E).

2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation (E).

3. Déterminer la solution particulière vérifiant $y(0) = 1$.

Exercice 6

Dans un repère du plan, on a tracé les représentations graphiques de cinq solutions de l'équation différentielle $y' = 2y$. En justifiant, préciser leur expression algébrique.



Exercice 7

Une colonie de 2000 bactéries est placée dans une enceinte close dont le milieu nutritif est renouvelé en permanence. On admet que l'évolution en fonction du temps *t* en heure ($t > 0$) du nombre d'individus $N(t)$ de cette colonie suit l'équation différentielle

$(E) : N'(t) = 3N(t) - 0,005(N(t))^2$.

Pour déterminer $N(t)$, on se propose de remplacer (E) par une équation plus simple puis de la résoudre.

1. On suppose que la fonction *N* ne s'annule pas sur $[0;+\infty[$ et on définit sur $[0;+\infty[$ la fonction *g* par $g(t) = \dfrac{1}{N(t)}$. Déterminer $g'(t)$.

2. Montrer que *N* est solution de (E) si, et seulement si, *g* est solution de $(E') : y' = -3y + 0,005$.

3. Résoudre (E') puis résoudre (E).

4. a. Déterminer la solution de (E) vérifiant la condition initiale indiquée dans l'énoncé.

b. Calculer le nombre de bactéries présentes au bout de deux heures. Arrondir à l'unité.