05 : Fonction logarithme népérien

Exercice 1

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x-1}{x}\ln x$.

1. a. Étudier les variations de la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x-1+\ln x$.

b. Calculer $g(1)$, puis en déduire le signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$.

2. a. Montrer que pour tout *x* de $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

b. En déduire les variations de la fonction *f*.

Exercice 2

Soit *f* la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. a. Étudier la limite de *f* en 0.

b. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$?

c. En déduire la limite de la fonction *f* en $+\infty$.

d. En déduire les asymptotes éventuelles à la courbe C_f.

2. a. On note f' la fonction dérivée de la fonction *f* sur $]0;+\infty[$.

Démontrer que, pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle ; $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x^3}$.

b. Résoudre sur $]0;+\infty[$ l'inéquation $-1-2\ln x\geq 0$.

En déduire le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction *f*.

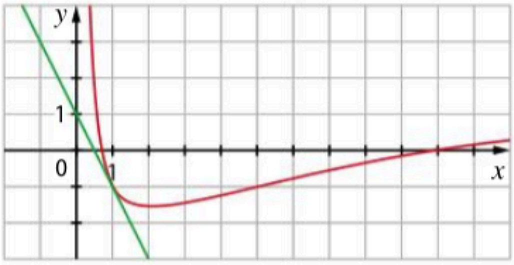
3.a. Démontrer que la courbe a un unique point d'intersection avec l'axe des abscisses dont on précisera les cordonnées.

b. En déduire le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 3

Soit f une fonction définie sur $]0;+\infty[$.

C_f est la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.



T est la tangente à C_f au point de coordonnées $(1;-1)$.

T passe par le point de coordonnées $(0;1)$.

1. Par lecture graphique, déterminer $f(1)$ et $f'(1)$.

2. On sait que $f(x)=2\ln x+\dfrac{a}{x}+b$ où a et b sont des nombres réels.

a. Calculer $f'(x)$.

b. Justifier alors que $a=4$ et $b=-5$.

3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes éventuelles à la courbe C_f.

4. Étudier les variations de f sur $]0;+\infty[$.

5. En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x)=0$ et donner une valeur approchée des solutions à 10^{-2} près.

Exercice 4

1. Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $u(x)=\ln x+x-3$.

a. Justifier que la fonction u est strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

b. Démontrer que l'équation $u(x)=0$ admet une unique solution α comprise entre 2 et 3.

c. En déduire le signe de $u(x)$ en fonction de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0;+\infty[$ par $f(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)(\ln x-2)+2$.

a. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

b. Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $]0;+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{u(x)}{x^2}$ où u est la fonction définie dans la question 1.

c. En déduire le sens de variation de la fonction *f* sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

Exercice 5

Une entreprise produit chaque année entre 100 et 900 pneus pour tracteurs.
On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle $[1;9]$ par $f(x)=0{,}5x^2-7x+14+6\ln x$.
On admet que la fonction *f* modélise le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu, exprimé en centaines d'euros, pour x centaines de pneus produits.

1. La fonction *f* est dérivable sur l'intervalle $[1;9]$ et on note f' sa fonction dérivée.

Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[1;9]$, on a $f'(x)=\dfrac{x^2-7x+6}{x}$.

2. a. Dresser le tableau de variation de *f* sur l'intervalle $[1;9]$.

b. Justifier que, sur l'intervalle $[1;9]$, l'équation $f(x)=5$ admet une unique solution α.

c. Donner un encadrement au centième près de u.

d. On considère l'algorithme ci-dessous.

```
X ← 1
Y ← 7,5
Tant que Y > 5
  | X ← X + 0,01
  | Y ← 0,5X² − 7X + 14 + 6 × ln (X)
Fin Tant que
```

À la fin de l'exécution de l'algorithme, quelle valeur numérique contient la variable X ?

3. Pour quelle quantité de pneus, le coût moyen annuel de fabrication d'un pneu est-il minimal ? À combien s'élève-t-il ?

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x) = x - \ln(1+x)$.

a. En étudiant les variations de la fonction f, montrer que, pour tout réel x positif ou nul, $\ln(1+x) \leq x$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $\ln(u_n) \leq 1$.

c. La suite (u_n) peut-elle avoir pour limite $+\infty$?

2. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n non nul, par : $v_n = \ln(u_n)$.

a. On pose $x = \frac{1}{n}$. Exprimer v_n en fonction de x.

b. Que vaut $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$? Aucune justification n'est demandée.

Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.