06 : Loi binomiale

Exercice 1

Une urne contient deux fois plus de boules rouges que de boules noires.
1. On tire une boule de l'urne. Quelle est la probabilité *p* que cette boule soit rouge ?

2. On tire trois fois de suite avec remise une boule de l'urne.
Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de trois boules, associe le nombre de boules rouges tirées.
a. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.

b. Réaliser un arbre pondéré illustrant ce schéma.

c. Déterminer $P\left(X=2\right)$, puis $P\left(X>2\right)$.

Exercice 2

Lors d'une épidémie de fièvre bovine, on s'est aperçu que si la maladie est diagnostiquée suffisamment tôt, on peut la guérir, sinon elle est mortelle.
Un test est mis au point. La probabilité pour que le test soit positif est 0,045.
On choisit trois animaux au hasard. La taille de cet élevage permet de considérer les épreuves comme indépendantes.
On note M la variable aléatoire qui, aux trois animaux choisis, associe le nombre d'animaux ayant un test positif.
1. Identifier un schéma de Bernoulli et en préciser ses paramètres.

2. Réaliser un arbre pondéré illustrant ce schéma.

3. Calculer la probabilité de l'événement $\left\{M=0\right\}$.

4. Calculer $P\left(M=1\right)$.

5. Quelle est la probabilité pour qu'au moins deux des animaux aient un test positif ?

Exercice 3

Une urne contient 50% de boules blanches.
On tire au hasard et avec remise, n boules de l'urne dont on note la couleur.
Soit X la variable aléatoire qui, au tirage de n boules, associe le nombre de boules blanches tirées.
1. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.

2. Déterminer $P\left(X=0\right)$ puis $P\left(X=1\right)$ en fonction de n.

3. En utilisant une calculatrice, déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité d'obtenir au moins deux boules blanches soit supérieure à 0,99.

Exercice 4

Dans une coopérative fruitière, on estime la proportion de fruits présentant un défaut d'aspect à 5 %.
On note X la variable aléatoire qui, à chaque lot de douze fruits, associe le nombre de fruits examinés présentant un défaut d'aspect.
1. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

2. Déterminer la probabilité de l'événement $\{X=3\}$.

3. Calculer $P(4 \leq X \leq 7)$.

4. Si le nombre de fruits présentant un défaut dans un lot est strictement supérieur à deux, le lot est soldé. Quelle est la probabilité que cela arrive ?

Exercice 5

On administre un vaccin à des enfants en bas âge. La proportion des enfants présentant une forte réaction à ce vaccin est 15 %. On examine vingt enfants d'une école maternelle. Le nombre d'enfants dans cette école est suffisamment grand pour qu'on puisse assimiler cet examen à vingt tirages indépendants.
1. Quelle est la probabilité, à 10^{-2} près, que quatre enfants exactement présentent une forte réaction au vaccin ?

2. Quelle est la probabilité, à 10^{-2} près, que le nombre d'enfants présentant une forte réaction soit compris entre 3 et 7 ?

Exercice 6

Un artiste expose son nouveau concept : chaque mois, il crée une œuvre unique qu'il expose dans un lieu à chaque fois différent. Après l'exposition, si l'œuvre n'est pas vendue, elle est détruite. Il recommence ainsi le mois suivant. Vu la notoriété de l'artiste, on estime à 0,85 la probabilité que l'œuvre soit vendue une fois exposée.
Les ventes sont indépendantes les unes des autres. Soit X la variable aléatoire qui, à une période de n mois, associe le nombre d'œuvres vendues.
1. L'artiste décide d'étaler son projet sur un trimestre.
a. Comment peut-on modéliser cette expérience aléatoire ? Représenter l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.

b. Représenter cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.

c. Calculer la probabilité que l'artiste vende une œuvre exactement.

2. Finalement l'artiste décide de réaliser ce projet sur un an.
a. Quelle est la loi suivie par X ? En préciser les paramètres.

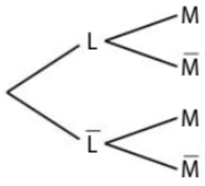
b. Calculer la probabilité que l'artiste vende exactement 9 œuvres. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.

3. Sur combien de mois l'artiste doit-il étaler son projet pour que la probabilité de ne pas vendre toutes ses œuvres dépasse 0,95 ?

Exercice 7

Lors d'une course cyclosportive, 70 % des participants sont licenciés dans un club, tandis que les autres ne sont pas licenciés. Aucun participant n'abandonne la course.
Parmi les cyclistes, 66 % font le parcours en moins de 5 heures, les autres au moins en 5 heures. On estime que le fait d'être licencié et celui de faire le parcours en moins de 5 heures sont des événements indépendants.
On interroge au hasard un cycliste ayant participé à cette course et on note L l'événement « le cycliste est licencié dans un dub » et M l'événement « le cycliste fait le parcours en moins de 5 heures ».

1. On choisit un cycliste au hasard. Reproduire et compléter l'arbre ci-dessous.



2. Un journaliste interroge indépendamment dix cyclistes au hasard.
On note X la variable aléatoire qui donne, parmi les dix cyclistes interrogés, le nombre de cyclistes ayant fait le parcours en moins de cinq heures. On suppose le nombre de cyclistes suffisamment important pour assimiler le choix de dix cyclistes à un tirage aléatoire avec remise.

a. Quelle est la loi de probabilité suivie par X ?

b. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'exactement quatre des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.

c. Calculer la probabilité, arrondie au millième, qu'au plus trois des dix cyclistes aient réalisé le parcours en moins de cinq heures.

d. Calculer la probabilité, arrondie au millième, que plus de 5 cyclistes aient réalisé le parcours en 5 heures et plus.

3. Un second journaliste souhaite interroger un cycliste licencié dans un club.
Combien de cycliste le journaliste doit-il interroger pour que la probabilité d'interroger un cycliste licencié dans un club soit supérieure ou égale à 0,99 ?

Exercice 8

Quand cela est nécessaire, on arrondira les résultats à 10^{-3} près.

Partie A

Pour mieux cerner le profil de ses clients, une banque réalise un sondage qui permet d'établir que :

* 53 % de ses clients ont plus de 50 ans ;
* 32 % de ses clients sont intéressés par des placements dits risqués ;
* 25 % de ses clients de plus de 50 ans sont intéressés par des placements dits risqués.

On choisit au hasard un client de cette banque et on considère les événements suivants :

* A : « le client a plus de 50 ans » ;
* R « le client est intéressé par des placements dits risqués ».

1. Donner $P(A)$, $P(R)$ et $P_A(R)$.

2. Représenter la situation par un arbre pondéré. Cet arbre pourra être complété par la suite.

3. Montrer que la probabilité que le client ait plus de 50 ans et soit intéressé par des placements dits risqués est 0,1325.

4. Sachant que le client est intéressé par des placements dits risqués, quelle est la probabilité qu'il ait plus de 50 ans ?

5. Calculer $P\left(\overline{A}\cap R\right)$ puis en déduire $P_{\overline{A}}(R)$. Interpréter les deux résultats obtenus.

6. Calculer la probabilité qu'un client qui n'est pas intéressé par des placements dits risqués ait moins de 50 ans.

Partie B

L'une des agences de cette banque charge ses conseillers de proposer un placement dit risqué R_1, à tous ses clients. Elle promet à ses conseillers une prime de 150 € s'ils parviennent, en un mois, à convaincre au moins 10 clients d'effectuer ce placement. Elle ajoutera une prime supplémentaire de 150 € s'ils parviennent, en un mois, à convaincre au moins 15 clients d'effectuer ce placement.
L'une des conseillères de cette banque, Camille, reçoit 45 clients ce mois-ci.
On admet que la probabilité que Camille réussisse à placer ce produit auprès de l'un de ses clients est de 0,23 et que la décision d'un client est indépendante de celles des autres clients.

1. Déterminer la probabilité que Camille place le produit R_1 auprès de 10 clients exactement ce mois-ci.

2. Montrer que la probabilité que Camille obtienne exactement 150 € de prime est environ 0,532.

3. Calculer la probabilité que Camille obtienne 300 € de prime.