10 – Fonctions trigonométriques

Exercice 1

Déterminer la mesure principale des angles dont une mesure en radians est :
$\frac{23\pi}{4}$; $-\frac{50\pi}{6}$; $\frac{1975\pi}{8}$; $\frac{127\pi}{4}$; $\frac{2020\pi}{3}$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, dire si *x* et *y* sont des mesures en radians d'un même angle orienté.

1. $x=\frac{-17\pi}{3}$ et $y=\frac{19\pi}{3}$ **2.** $x=\frac{13\pi}{4}$ et $y=-\frac{31\pi}{4}$

Exercice 3

On donne $\cos x=-\frac{1}{3}, x\in[0;\pi]$. Calculer :

1. $\sin x$; **2.** $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; **3.** $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$; **4.** $\cos(x+\pi)$.

Exercice 4

Exprimer en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$:

$$A=\cos(\pi-x)-\sin(\pi-x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$$

$$B=\sin(-x)-\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos(-\pi-x)$$

Exercice 5

On veut résoudre l'équation $\sin x=\frac{1}{2}$.

1. Placer les points *A* et *B* d'ordonnée du cercle trigonométrique.

2. a. Déterminer les réels *a* et *b* de $]-\pi;\pi]$ associés aux points *A* et *B*.

b. En déduire les solutions de l'équation $\sin x=\frac{1}{2}$ dans $]-\pi;\pi]$.

3. Quelles sont les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$?

Exercice 6

On veut résoudre l'équation $\cos x=-\frac{1}{2}$.

1. Déterminer les solutions de l'équation dans $]-\pi;\pi]$.

2. Quelles sont les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$?

Exercice 7

1. Donner un encadrement de $\cos(x)$ pour tout réel *x*.

2. Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3+2\cos(x)}{5}$

a. Montrer que $f(x)$ est strictement positif sur $\mathbb{R}$.

b. Résoudre l'équation $f(x)=1$ pour *x* dans l'intervalle $[0;2\pi[$. (On pourra s'aider d'un cercle trigonométrique.)

c. En déduire les solutions de cette équation dans $\mathbb{R}$.

3. Montrer qu'il existe un unique réel de l'intervalle $[0;\pi]$ tel que $f(x)=\dfrac{4}{5}$. Le déterminer.

4. a. Montrer que la fonction *f* est périodique de période 2π. Comment cela se traduit-il sur la représentation graphique de *f* ?

b. Étudier la parité de *f*. Quelle conséquence géométrique peut-on en déduire sur la courbe représentative de *f* ?

5. À l'aide de la calculatrice et des résultats des questions précédentes, tracer la courbe représentative de *f* sur l'intervalle $[-2\pi;2\pi]$.

Exercice 9

Soit *f* la fonction définie sur par $f(x)=x+\sin(x)$.
On note C_f la représentation graphique de *f* dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. La fonction *f* est-elle paire ? impaire ?

2. En déduire comment obtenir la partie C_2 de la courbe C_f sur $[-\pi;0]$ si l'on a tracé la partie C_1 de C_f sur $[0;\pi]$.

3. Calculer $f(x+2\pi)$ en fonction de $f(x)$.

4. Soit *M* le point de coordonnées $(x;f(x))$, *x* appartenant à $[-\pi;\pi]$.
Quelle(s) transformation(s) géométrique(s) permet(tent) de passer du point *M* de la représentation graphique de la courbe C_f au point M' d'abscisse $x+2\pi$ de C_f ?

5. Tracer C_f sur l'intervalle $[0;\pi]$ puis sur $[-\pi;3\pi]$ à l'aide des transformations géométriques trouvées précédemment.

Exercice 10

Les six questions de cet exercice sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée.
Indiquer si elle est vraie ou fausse, en justifiant la réponse.

1. Pour tout réel *x*, $\cos^2(x)-\sin^2(x)=2\cos^2(x)+1$.

2. Pour tout réel *x*, $\cos^2(x)-\sin^2(x)=1-2\sin^2(x)$.

3. Pour tout réel *n* non nul, $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)-\sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{n}\right)=0$.

4. Pour tout réel *x*, $\sin(x)=\sqrt{1-\cos^2(x)}$.

5. $\cos\left(\frac{100\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$.

6. Pour tout réel *x*, $\cos(2020\pi-x)+\cos(x+1000\pi)=2\cos(2120\pi+x)$.