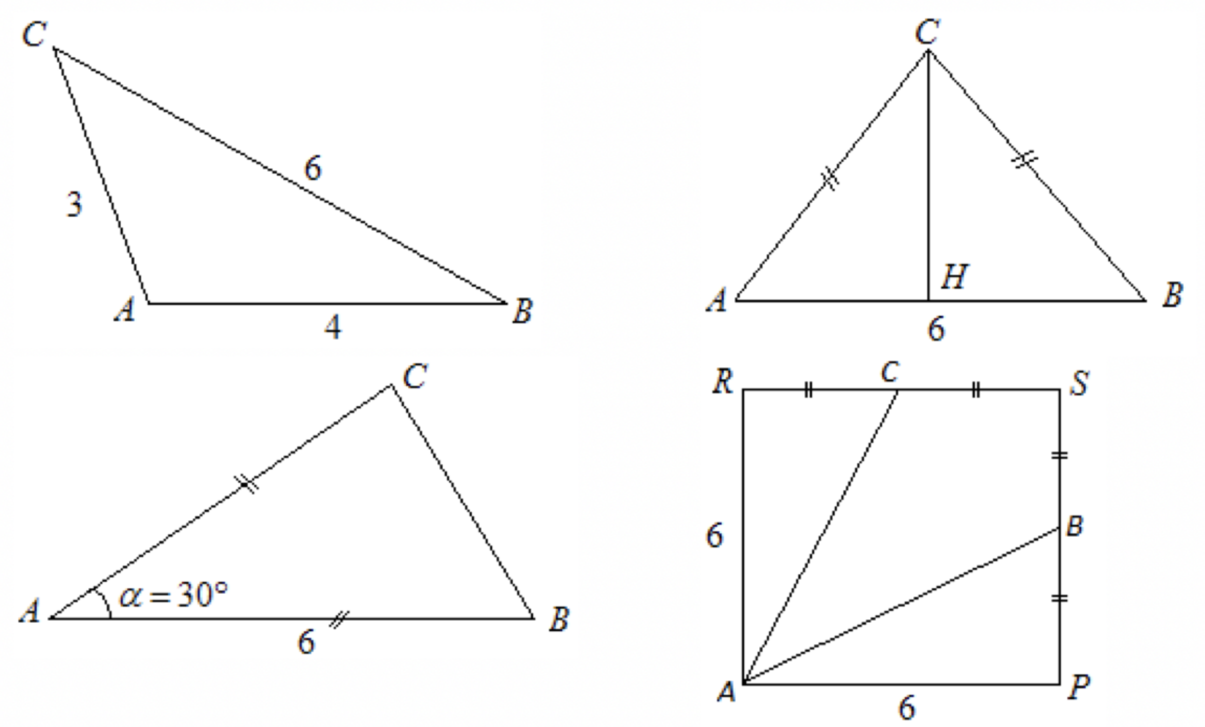
02 : Produit scalaire

Exercice 1

1. Soit ABC un triangle rectangle isocèle en A tel que $AB = AC = 1$. Soit I le milieu de $[BC]$ et J le point du plan tel que $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BC}$. Calculer les produits scalaires suivants :

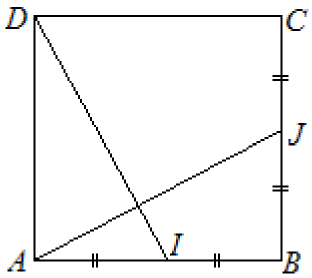
$\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{BA}$ $\overrightarrow{AJ}.\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{IJ}.\overrightarrow{AC}$.

2. Dans chacun des cas suivants, calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Exercice 2

Soit $ABCD$ un carré de côté a. Soit I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.



Démontrer que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

Exercice 3

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB=10$ et de largeur $AD=3$. Soit M un point du segment $[AB]$ tel que $AM=x$, avec $0<x<10$.

1. Démontrer que l'on a $\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{AC}=10x-9$.

2. Pour quelle valeur de x les droites (DM) et (AC) sont-elles orthogonales ?

3. Démontrer que $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MC}=x^2-10x+9$.

4. Pour quelle(s) valeur(s) de x le triangle DMC est-il rectangle en M ?

Exercice 4

$(O;\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé.

On considère les points $A(1;2)$, $B(2;-2)$ et $C(-7;0)$.

1. a. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BC}$.

b. Calculer les longueurs *AB*, *AC* et *BC*. Que peut-on dire du triangle *ABC* ?

2. Déterminer la valeur de l'angle $\widehat{ABC}$ arrondi au degré près.

Exercice 5

Soit $ABCD$ le parallélogramme tel que $AB=8$, $AD=6$ $AC=12$.

1. Déterminer une valeur approchée au degré près de la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

2. En déduire la mesure des angles $\widehat{BAD}$ et $\widehat{ADC}$.

3. Calculer *DB*.

Exercice 6

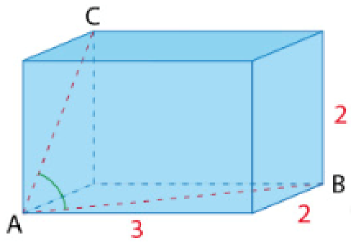
Soit *ABC* un triangle.

1. Démontrer que, pour tout point *M* du plan, on a : $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CM}.\overrightarrow{AB}=0$.

2. Soit *H* le point d'intersection des hauteurs du triangle *ABC* issues de *A* et de *B*.
Démontrer à l'aide de la formule du **1.** que la troisième hauteur passe aussi par le point *H*.

Exercice 7

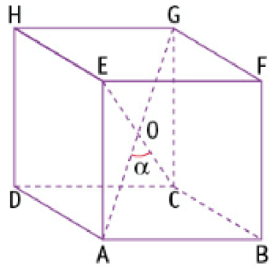
Voici un parallélépipède rectangle.



Déterminer la mesure en degré de l'angle $\widehat{BAC}$ arrondi au degré près.

Exercice 8

$BACDEFGH$ est un cube de côté 3 et de centre O.



1. Quelle est la nature du quadrilatère $ACGE$? En faire une figure en vraie grandeur.

2. On note α la mesure de l'angle $\widehat{AOC}$. Montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = \frac{27}{4}\cos\alpha$

3. En utilisant le point I milieu de $[AC]$, montrer que $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OC} = -\frac{9}{4}$

4. En déduire la mesure de α à 0,1 degré près.

Exercice 9

Soit ABC un triangle rectangle en A, soit H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et soit I le milieu du segment $[BC]$. Soit K et L les projetés orthogonaux du point H sur les droites (AB) et (AC) respectivement.

1. Faire une figure.

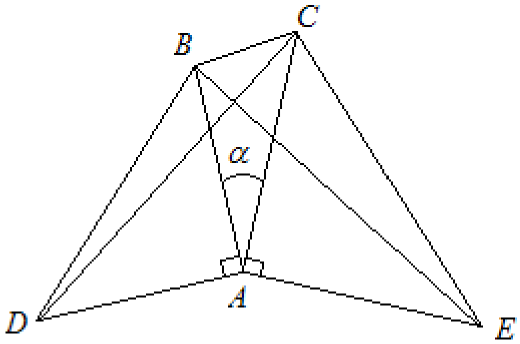
2. Démontrer que : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AH}$

3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et de $\overrightarrow{AC}$.

4. Démontrer que les droites (AI) et (KL) sont orthogonales.

Exercice 10

Soit ABC un triangle quelconque, ADB et ACE deux triangles rectangles isocèles en A construits à l'extérieur du triangle ABC.



1. Démontrer que $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}$

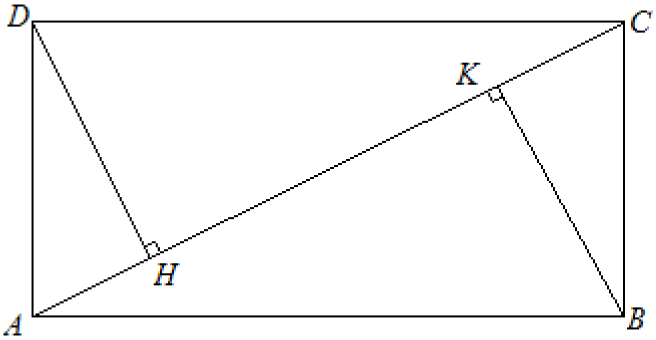
2. En déduire que $CD=BE$.

3. Démontrer que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AD}.\overrightarrow{AE}$

4. En déduire que les droites (CD) et (BE) sont orthogonales.

Exercice 11

Soit $ABCD$ un rectangle de longueur $AB=L$ et de largeur $AD=l$. Soit H et K les projetés orthogonaux respectifs des points D et B sur le segment $[AC]$.



1. Démontrer que $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{DB}=L^2-l^2$.

2. En déduire que $HK=\dfrac{L^2-l^2}{\sqrt{L^2+l^2}}$.

À quelle condition portant sur Let l aura-t-on $HK=\dfrac{1}{3}AC$?

Exercice 12 : Droite d'Euler

ABC est un triangle non équilatéral et non aplati.
A', B' et C' sont les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[BC]$.
O est le centre du cercle circonscrit au triangle *ABC*, c'est-à-dire le point de concours des trois médiatrices du triangle.
1. Réaliser une figure que l'on complétera au fur et à mesure.

2. *H* est le point défini par $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.
a. Démontrer que $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{AH}=2\overrightarrow{OA'}$.

c. Justifier que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

d. Montrer que la droite (BH) est perpendiculaire à la droite (AC).

e. En déduire que les trois hauteurs du triangle *ABC* sont concourantes en *H*.

3. *G* est le point défini par $\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AA'}$
a. Démontrer que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

b. En déduire que $\overrightarrow{BG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BB'}$.

4. a. Démontrer que $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OH}$.

b. Que peut-on en déduire pour les points *G*, *H* et *O* ?

Dans tout triangle non équilatéral et non aplati, les points G, H et O sont alignés sur une droite appelée droite d'Euler, en l'honneur du mathématicien suisse Leonhard Euler qui l'a découverte en 1763.