03 : Dérivation et convexité

I. Étudier une fonction composée

g est une fonction définie sur un intervalle *J* de $\mathbb{R}$ et *u* est une fonction définie sur un intervalle *I* de $\mathbb{R}$ telle que, pour tout nombre réel *x* de *I*, on a $u(x) \in J$.

1. Fonction composée

La fonction composée de *u* par *g*, notée $g \circ u$, est définie pour tout $x \in I$ par : $(g \circ u)(x) = g(u(x))$.

Exemple

u est définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 + 4$ et *g* est définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $(g \circ u)(x) = g(u(x)) = g(x^2+4) = \sqrt{x^2+4}$
- Pour tout $x \in [0;+\infty[$, on a : $(u \circ g)(x) = u(g(x)) = \left(\sqrt{x}\right)^2 + 4 = x + 4$

Remarque

En général $g \circ u \neq u \circ g$

2. Limites d'une fonction composée

Théorème

a, *b* et *c* désignent trois nombres réels ou $-\infty$, ou $+\infty$.

Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et si $\lim\limits_{X \to b} g(X) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(u(x)) = c$

Exemple

$\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 4\right) = 4$ et $\lim\limits_{X \to 4} \sqrt{X} = \sqrt{4} = 2$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + 4} = 2$

Application 1

Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(e^{3x+2} + 1\right)$

3. Dérivation d'une fonction composée

Soit u et g deux fonctions dérivables de dérivées respectives u' et g', alors la fonction $g \circ u$ est dérivable et sa dérivée s'écrit : $(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$.
Autrement dit pour tout réel x de I : $(g \circ u)'(x) = u'(x) \times g'(u(x))$.

Exemple

Soit $u(x) = x^2 + 4$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

$u'(x) = 2x$ et $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Posons $h(x) = (g \circ u)(x) = \sqrt{x^2+4}$

$h'(x) = u'(x) \times g'(u(x)) = 2x \times \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+4}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

Application 2

Déterminer la dérivée de $f(x) = e^{x^2+1}$ puis celle de $g(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 1}$.

4. Dérivées de fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
u^2	$2u'u$
u^3	$3u'u^2$
u^n	$nu'u^{n-1}$
$\dfrac{1}{u}$	$\dfrac{-u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\cos(u)$	$-u'\sin(u)$
$\sin(u)$	$u'\cos(u)$
e^u	$u'e^u$
$f(ax+b)$	$af'(ax+b)$

II. Convexité d'une fonction

1. Dérivée seconde

Définition

Soit une fonction *f* dérivable sur un intervalle *I* dont la dérivée f' est dérivable sur *I*.
On appelle fonction dérivée seconde de *f* sur *I* la dérivée de f' et on la note f''.

Exemple

Soit $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7x + 1$

$f'(x) = 6x^2 - 6x + 7$

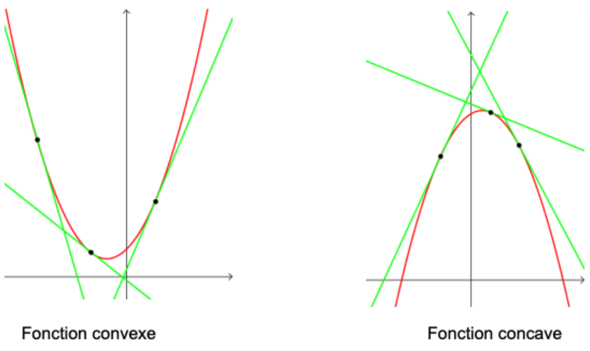
$f''(x) = 12x - 6$

2. Fonction convexe et fonction concave

Définition

- *f* est une fonction convexe sur un intervalle *I* si sa courbe représentative est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.

- *f* est une fonction concave sur un intervalle *I* si sa courbe représentative est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.



Propriété

Soit une fonction *f* définie et dérivable sur un intervalle *I*.

- La fonction *f* est convexe sur *I*, si sa dérivée f' est croissante sur *I*, autrement dit $f''(x) \geq 0$, pour tout *x* de *I*.
- La fonction *f* est concave sur *I*, si sa dérivée f' est décroissante sur *I*, autrement dit $f''(x) \leq 0$, pour tout *x* de *I*.

Démonstration

Soit *f* une fonction telle que $f''(x) \geq 0$ sur *I*.
On considère la fonction *g* dérivable sur *I* et définie par : $g(x) = f(x) - f'(a)(x-a) - f(a)$
. Alors $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.
Or f' est croissante sur *I*, car $f''(x) \geq 0$, donc g' est également croissante.
De plus, $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.
Donc g' est négative pour $x \leq a$ et positive pour $x \geq a$. On a alors :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

Donc $g(x) \geq 0$ sur *I*.
Autrement dit
$f(x) - f'(a)(x-a) - f(a) \geq 0$
Donc $f(x) \geq f'(a)(x-a) + f(a)$
Donc C_f est au-dessus de ses tangentes sur *I*, autrement dit *f* est convexe sur *I*.

La démonstration est analogue si *f* est concave sur *I*.

Application 3

Étudier la convexité de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 9x^2 + 4$.

3. Point d'inflexion

Définition

Soit une fonction *f* dérivable sur un intervalle *I*.
Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente en ce point.

Remarque

Au point d'inflexion, la fonction change de convexité.
Autrement dit en ce point la courbe change de convexité, et donc $f''(x)$ s'annule en changeant de signe.

Exercice 1

Déterminer la convexité de la fonction *f* définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 12x^2 + 1$.
Préciser le ou les points d'inflexion.

Exercice 2

Faire de même avec la fonction *g* définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{x^3}{6} - 3x^2 + x - 1$.