06 : Loi binomiale

I. Succession d'épreuves indépendantes

1. Univers associé

Soit une succession de n épreuves indépendantes dont les univers associés sont respectivement Ω_1, Ω_2,…, Ω_n.

L'univers associé à cette succession de n épreuves est le produit cartésien $\Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$.

Exemple 1

- On lance un dé plusieurs fois de suite et on note à chaque fois le résultat.
- On tire plusieurs fois une boule d'une urne et on la remet dans l'urne.

Exemple 2

On lance un dé cubique puis on jette une pièce de monnaie.
L'univers associé à l'expérience est : $\{1;2;3;4;5;6\} \times \{P;F\}$.
Des issues possibles sont $(3;P)$ ou $(5;F)$ mais pas $(F;2)$ ou $(P;P)$.

2. Probabilité

Lors d'une répétition de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1;x_2;...;x_n)$ est égale au produit des probabilités qui la compose $P(x_1)\times P(x_2)\times ...\times P(x_n)$.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, chaque issue a la même probabilité. On a par exemple :
$P(5;F) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$

Application 1

On considère l'expérience suivante :
Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules rouges. On tire au hasard une boule et on la remet dans l'urne. On répète l'expérience deux fois de suite.
1. Représenter l'ensemble des issues de ces expériences dans un arbre.
2. Déterminer la probabilité :
a. d'obtenir deux boules blanches ;
b. une boule blanche et une boule rouge ;
c. au moins une boule blanche.

Remarque

L'univers associé à cette expérience est $\{B;R\} \times \{B;R\}$.

II. Schéma de Bernoulli – Loi binomiale

1. Épreuve de Bernoulli

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une appelée succès (S), l'autre échec $(\overline{S})$.

Exemple

Une urne contient dix boules indiscernables au toucher : 5 bleues, 2 jaunes et 3 rouges.
On tire une boule au hasard.
Cette expérience a trois issues, mais l'on peut considérer qu'il s'agit d'une épreuve de Bernoulli en prenant pour succès, par exemple S : « Tirer une boule rouge » et pour échec $\overline{S}$: « Tirer une boule bleue ou jaune ».

2. Loi de Bernoulli

Définition

Une loi de Bernoulli est une loi de probabilité qui suit le schéma suivant :

- La probabilité d'obtenir un succès est égale à p,
- La probabilité d'obtenir un échec est égale à $1-p$.
- p est appelé le paramètre de la loi de Bernoulli.

Exemple

Dans l'exemple précédent on a $p=0,3$.

Par convention

Au succès, on peut associer le nombre 1 et à l'échec, on peut associer le nombre 0.
On a alors la loi de Bernoulli représentée par le tableau suivant :

k	1	0
$p(X=k)$	p	$1-p$

Dans l'exemple précédent on a

k	1	0
$p(X=k)$	0,3	0,7

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
On a alors : $E(X)=p$ $\qquad V(X)=p(1-p)$

Démonstration

$$E(X)=1\times p+0(1-p)$$
$$E(X)=p$$

$$V(X)=1^2\times p+0^2(1-p)-p^2$$
$$V(X)=p-p^2$$
$$V(X)=p(1-p)$$

3. Schéma de Bernoulli

Définition

Un schéma de Bernoulli est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité du succès est p.

Exemple

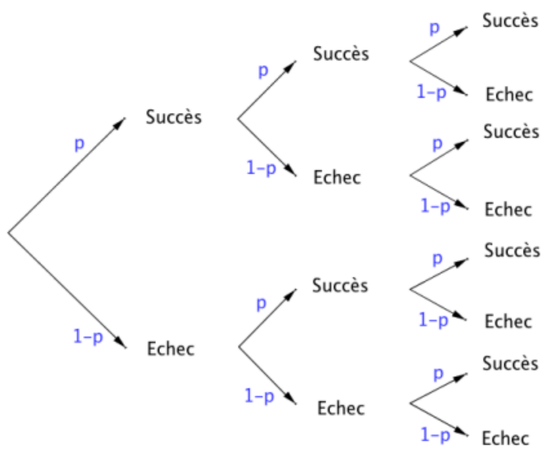
La répétition de 10 lancers d'une pièce de monnaie est un schéma de Bernoulli de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{2}$.

4. Loi binomiale

On considère un schéma de Bernoulli constitué de n épreuves où la probabilité du succès est p.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès lors de ces n épreuves.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi binomiale de paramètres n et p.
On la note $B(n;p)$.

Exemples

On a représenté dans un arbre de probabilité les issues d'une expérience suivant un schéma de Bernoulli composé de 3 épreuves de Bernoulli de paramètre p.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès.



On a par exemple :

- $p(X=3)=p^3$.
  En effet, en suivant les branches sur le haut de l'arbre, on arrive à 3 succès avec une probabilité égale à $p\times p\times p$.
- $X=2$ correspond aux suites d'issues suivantes :
  (Succès ; Succès ; Échec)
  (Succès ; Échec ; Succès)
  (Échec ; Succès ; Succès)
  Chacune des issues a une probabilité égale à : $p^2(1-p)$ donc on a $p(X=2)=3p^2(1-p)$

Application 2

Une expérience aléatoire consiste à lancer trois pièces : une pièce truquée qui tombe deux fois plus souvent sur « Pile » que sur « Face », et deux pièces équilibrées.
On modélise cette expérience aléatoire par une succession d'épreuves indépendantes.
1. Quelle est la probabilité d'obtenir « Pile » lors du lancer de la pièce truquée ?
2. Exprimer l'univers de cette expérience à l'aide d'un produit cartésien.
3. Réaliser un arbre pondéré représentant la situation.
4. Déterminer la probabilité de l'événement E : « obtenir une seule fois Pile ».

5. Coefficients binomiaux

Définition

On réalise une expérience suivant un schéma de Bernoulli de paramètres *n* et *p*.
Soit un entier naturel *k* tel que $0\le k\le n$.
On appelle coefficient binomial ou combinaison de *k* parmi *n*, le nombre de chemins conduisant à *k* succès parmi *n* épreuves sur l'arbre représentant l'expérience.
Ce nombre se note : $\binom{n}{k}$.

Remarque

TI Nspire : Menu 5 – 3

Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n;p)$, alors pour tout entier $0\le k\le n$,
$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

Démonstration

En effet, un chemin de l'arbre réalisant k succès de probabilité p, et $n-k$ échecs de probabilité $1-p$, conduit à une issue dont la probabilité est donnée par $p^k(1-p)^{n-k}$.
Or, il y a $\binom{n}{k}$ chemins réalisant k succès donc $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

6. Espérance et variance de la loi binomiale

Propriété

Si X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $B(n;p)$ alors :

- $E(X)=np$
- $V(X)=np(1-p)$

Démonstration

La variable X suit la loi binomiale de paramètres n et p. On considère un schéma de Bernoulli composé de n épreuves indépendantes de probabilité de succès p.
La variable X est alors égale au nombre de succès obtenus au cours de la répétition des n épreuves de Bernoulli.
Pour tout i allant de 1 à n, on note X_i la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si on obtient un succès à la i-ème épreuve et 0 sinon.
On a $X=X_1+X_2+...+X_n$.
Les variables aléatoires X_i, ont pour loi $P(X_i=1)=p$ et $P(X_i=0)=1-p$.
Pour tout i allant de 1 à n, on a :

$$E(X)=E(X_1+X_2+...+X_n)=E(X_1)+E(X_2)+...+E(X_n)=p+p+...+p=np$$
$$V(X)=V(X_1+X_2+...+X_n)$$
$$V(X)=V(X_1)+V(X_2)+...+V(X_n)=p(1-p)+p(1-p)+...+p(1-p)=np(1-p)$$

Exercice

Un QCM comporte trois questions. Pour chacune d'elles, quatre réponses sont proposées dont une seule est correcte. Un élève donne au hasard une réponse à chaque question. On note X le nombre de réponses correctes données par l'élève.
1. Justifier que la situation relève d'une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
b. Calculer $E(X)$ et $V(X)$. Donner une interprétation de $E(X)$.
3. Calculer la probabilité des événements suivants :
A : « Répondre juste à toutes les questions » ;
B : « Répondre juste à 2 questions » ;
C : « Répondre juste à aucune questions » ;
D : « Répondre juste à au moins une question ».