07 : Suites arithmétiques – Suites géométriques

I. Suites arithmétiques

1. Définition

Une suite arithmétique est une suite obtenue en ajoutant au terme précédent toujours un même nombre, appelé raison.
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note : $u_{n+1} = u_n + r$.

Exemple

5 ; 8 ; 11 ; 14 est une suite arithmétique de quatre termes, de premier terme 5 et de raison 3.

2. Expression du terme général

Théorème

Le terme de rang n d'une suite arithmétique (u_n) de premier terme u_0 et de raison r est :

$$u_n = u_0 + nr.$$

Si le premier terme est u_1, on a : $u_n = u_1 + (n-1)r$.
Plus généralement, si k est un entier quelconque, $u_n = u_k + (n-k)r$.

Démonstration

On a $u_n = u_0 + \underbrace{r + r + ... + r}_{n \text{ termes}} = u_0 + nr$.
Comme $u_1 = u_0 + r$ alors $u_n = u_1 - r + nr = u_1 + (n-1)r$.
De plus $u_k = u_0 + kr$ donc $u_n - u_k = u_0 + nr - u_0 - kr = (n-k)r$ d'où le résultat.

Application 1

1. Calculer le 16$^{\text{ième}}$ terme de la suite arithmétique telle que $u_0 = 9$ et de raison -5.
2. On donne $v_4 = 11$ et $v_8 = 23$. Calculer v_{10}. Exprimer v_n en fonction de n.

3. Reconnaître qu'une suite est arithmétique

2 techniques principales sont à retenir :

- On montre que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.
- Le terme général u_n s'écrit sous la forme $an + b$. Dans ce cas b est le premier terme et a la raison de la suite.

Exercice 1

1. Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n^2+4n+1}{n+1}$ est arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.

2. Soit *a* un réel fixé, montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = (an+1)^2 - (an-2)^2$ est arithmétique et préciser son premier terme et sa raison.

Exercice 2

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+3u_n} \end{cases}$.

1. Calculer les 4 premiers termes.

2. (u_n) est-elle arithmétique ?

3. On définit la suite (v_n) telle que $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique et donner son premier terme et sa raison.

4. Exprimer v_n en fonction de *n*.

5. En déduire u_n en fonction de *n*.

II. Suites géométriques

1. Définition

Une suite géométrique est une suite obtenue en multipliant le terme précédent toujours par un même nombre, appelé raison.
Pour tout *n* de $\mathbb{N}$, on note : $u_{n+1} = qu_n$.

Exemple

1 ; 3 ; 9 ; 27 est une suite géométrique de quatre termes, de premier terme 1 et de raison 3.

2. Expression du terme général

Théorème

Le terme de rang *n* d'une suite géométrique (u_n) de premier terme u_0 et de raison *q* est :

$$u_n = u_0 q^n .$$

Si le premier terme est u_1, on a : $u_n = u_1 q^{n-1}$.

Plus généralement, si *k* est un entier quelconque, $u_n = u_k q^{n-k}$.

Démonstration

On a $u_n = u_0 \times \underbrace{q \times q \times ... \times q}_{n \text{ termes}} = u_0 \times q^n$ comme $u_1 = u_0 \times q$ alors $u_n = \frac{u_1}{q} \times q^n = u_1 \times q^{n-1}$.

De plus $u_k = u_0 \times q^k$ donc $\frac{u_n}{u_k} = \frac{u_0 \times q^n}{u_0 \times q^k} = q^{n-k}$ d'où le résultat.

Application 2

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 3.

2. On donne $v_7 = 16$ et $v_{10} = \frac{-128}{27}$. Déterminer *q*. En déduire v_n en fonction de *n*.

3. Reconnaître qu'une suite est géométrique

2 techniques principales sont à retenir :

1. On montre que le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$.

2. Le terme général u_n s'écrit sous la forme ba^n. Dans ce cas *b* est le premier terme et *a* la raison de la suite.

Application 3

Montrer que la suite (u_n) définie par $u_n = -4^{2n-1}$ est géométrique et préciser son premier terme est sa raison.

Exercice 3

On donne $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel *n*, $u_{n+1} = 3u_n + 8$.
1. Pour quelle valeur théorique de u_0 la suite (u_n) est constante. On appelle α cette valeur.

2. On pose $v_n = u_n - \alpha$. Montrer que (v_n) est géométrique. On précisera ses éléments caractéristiques.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.

4. Variations

Théorème

On désigne par *q* un nombre réel non nul.

- Si $q > 1$, alors la suite (q^n) est strictement croissante.
- Si $q = 1$, alors la suite (q^n) est constante égale à 1.
- Si $0 < q < 1$, alors la suite (q^n) est strictement décroissante.
- Si $q = 0$, alors la suite (q^n) est constante égale à 0, à partir du rang 1.
- Si $q < 0$, la suite (q^n) n'est pas monotone.

Démonstration

Si $q = 0$ ou si $q = 1$, le résultat est évident.
Si $q < 0$: incompatible avec la monotonie car alternée.
$q^{n+1} - q^n$ est du signe de $q - 1$ d'où les résultats.

Application 4

Déterminer la monotonie de la suite (u_n) définie par $u_n = -3\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}$.

Exercice 4

Soit (u_n) définie par $u_0 = -1$ et $u_{n+1} = \frac{-u_n + 12}{5}$.
1. Montrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 2$ est géométrique et préciser son premier terme et sa raison.

2. Exprimer v_n puis u_n en fonction de *n*.

3. Étudier la monotonie de la suite (u_n).

III. Calcul de somme de termes consécutifs

1. Somme de termes d'une suite arithmétique

Théorème

Soit *n* un entier naturel non nul. Alors la somme des *n* premiers entiers non nuls est :
$1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$.
Plus généralement on a :
$\text{S}=\text{ nombre de termes}\dfrac{\text{premier terme}+\text{dernier terme}}{2}$

Démonstration

On pose :
$\begin{matrix} S=1+ & 2+ & ...+(n-1)+n \\ S=n+(n-1)+...+ & 2+ & 1 \end{matrix}$. On a aussi :
Donc on a : $2S=\underbrace{(n+1)+(n+1)+...(n+1)}_{n\text{ fois}}$.
Donc $2S=n(n+1)$ d'où le résultat.

Application 5

Calculer :
1. $S=1+2+3+...+100$. **2.** $S=5+7+9+...+301$.

3. quelle est la somme des multiples de 6 compris entre 200 et 4000.

4. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0=-4$ et de raison 3.
Sachant que $S=u_0+u_1+...+u_n=150$, calculer *n*.

2. Somme de termes d'une suite géométrique

Théorème

Soit *n* un entier naturel non nul et *q* un réel différent de 1. Alors :
$1+q+q^2+...+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.
Plus généralement on a :
$\text{S}=\text{ premier terme}\dfrac{1-\text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1-\text{raison}}$.

Démonstration

On pose : $S = 1 + q + q^2 + ... + q^n$.
On a alors : $q \times S = q + q^2 + q^3 ... + q^{n+1}$.
Donc on a : $S - q \times S = \left(1 + q + q^2 + ... + q^n\right) - \left(q + q^2 + q^3 ... + q^{n+1}\right)$.
On obtient : $S\left(1-q\right) = 1 - q^{n+1}$.
Comme $q \neq 1$, on a donc : $S = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Application 6

Calculer :
1. $S = 2 + 4 + 8 + ... + 1024$. **2.** $S = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{8} + ... - \dfrac{1}{256}$.

Exercice 5

Soit $\left(u_n\right)$ la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel *n* : $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 4$.
Soit $\left(v_n\right)$ la suite définie par $v_n = u_n - 8$.
1. Calculer u_1, u_2 et u_3, puis v_0, v_1, v_2 et v_3.

2. Montrer que $\left(v_n\right)$ est une suite géométrique et préciser sa raison.

3. En déduire une expression de v_n en fonction de *n*, puis de u_n en fonction de *n*.

4. Déterminer les variations de $\left(v_n\right)$ puis de $\left(u_n\right)$.

5. Calculer $S = v_0 + v_1 + ... + v_n$ et $T = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ en fonction de *n*.

Exercice 6

Soit $\left(u_n\right)$ et $\left(v_n\right)$ deux suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :
$u_n = \dfrac{1}{3} \times 2^n - \left(7n + 4\right)$ et $v_n = \dfrac{1}{3} \times 2^n + 7n + 4$.
Soit $\left(w_n\right)$ et $\left(t_n\right)$ deux suites définies par : $w_n = u_n + v_n$ et $t_n = u_n - v_n$.
1. Montrer que $\left(w_n\right)$ est géométrique. On précisera le premier terme de la raison.

2. Montrer que $\left(t_n\right)$ est arithmétique. On précisera le premier terme de la raison.

3. Soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. Donner une expression de S_n en fonction de *n*.

IV. Approche du comportement à l'infini

Théorème 1

Soit u une suite arithmétique de raison r non nulle.
- Si $r > 0$, la suite u diverge vers $+\infty$. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$, la suite u diverge vers $-\infty$. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Théorème 2

Soit q un réel différent de 1 :
- Si $q > 1$, la suite (q^n) diverge vers $+\infty$. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, la suite (q^n) converge vers 0. On note $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q < -1$, la suite (q^n) diverge et n'a pas de limite.

Exercice 7

Soit u la suite arithmétique de raison 0,4 et de premier terme , et v la suite géométrique de raison 0,9 et de premier terme .
1. Déterminer les limites des suites u et v.

2. Déterminer par un calcul le rang à partir duquel : .

3. Ecrire un algorithme en Python qui donne le rang n à partir duquel .
Quel est alors ce rang ?